Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 3

МАТЕМАТИКА

Т. Л. КОЗЬМИНА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ТРИЖДЫ СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 8 VII 1946)

1. Три семейства ∞^1 поверхностей (S_1), (S_2), (S_3) составляют трижды сопряженную систему C^3, если через каждую точку пространства проходит по одной поверхности из каждого семейства (S_i) и поверхности обоих семейств (S_j), (S_k) высекают на каждой поверхности S_i третьего семейства сопряженную систему линий.

Присоединим к каждой точке пространства A_0 тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$, каждое ребро A_0A_i которого касается линии пересечения поверхностей S_j, S_k $(i, j, k$ — три различных числа 1, 2, 3). Мы их назовем осями системы C^3 в точке A_0.

Проективные перемещения тетраэдра определяются уравнениями

$$dA_0 = \omega_0^\alpha A_\alpha\,; \quad dA_i = \omega_i^\alpha A_\alpha; \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где A_0, A_i суть аналитические точки (совокупность четырех однородных координат геометрической точки) и ω_α^β — формы Пфаффа, из которых $\omega_0^i = \omega^i$ линейно независимы.

На каждой поверхности S_i две оси A_0A_j, A_0A_k сопряжены, если

$$[\omega_j^k\,\omega^j\,\omega^k] = 0, \quad j \neq k \text{ фиксированы.} \tag{2}$$

Шесть уравнений (2) составляют систему уравнений, определяющих наиболее общую систему C^3. Система (2) в инволюции и определяет C^3 с 6 произвольными функциями двух аргументов.

2. Теорема 1. *Приложение преобразования Лапласа одновременно ко всем поверхностям одного семейства (S_i) системы C^3 приводит к новой системе C^3.*

Если вершина A_1 совпадает со вторым фокусом луча A_0A_1 конгруэнции $\omega^3 = 0$, то при подходящем нормировании координат точки A_1 имеем

$$\omega_1^2 = \omega^1. \tag{3}$$

Легко видеть, что касательная к линии $\omega^1 = \omega^2 = 0$ поверхности (A_1) расположена в плоскости $A_0A_1A_3$. Если принять за вершину A_3 тетраэдра точку пересечения A_0A_3 с этой касательной, то будем иметь $[\omega_1^0\omega^1\omega^2] = 0$. Внешнее дифференцирование уравнения (3) даст нам при подходящем нормировании точки A_3

$$\omega_3^2 = \omega^3, \quad [\omega_3^0\omega^2\omega^3] = 0. \tag{4}$$

Обозначая

$$B_0 = A_1, \quad B_1 = A_2 + a_1{}^0 A_0 + a_1{}^3 A_3, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = c_1{}^3 A_3,$$
$$dB_i = \Omega_i^\alpha B_\alpha, \quad \omega_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta \omega^1 + b_\alpha^\beta \omega^2 + c_\alpha^\beta \omega^3, \tag{5}$$

мы без труда убедимся, что новые формы $\Omega_j{}^k$ удовлетворяют уравнениям (2), откуда и следует теорема 1.

3. Теорема 2. *Третьи оси A_0A_3, B_0B_3 и т. д. последовательности Лапласа трижды сопряженных систем относительно сетей $\omega^3 = 0$ образуют такую же последовательность Лапласа, описанную около первоначальной последовательности. Для $\omega^3 = 0$ имеем последовательность конгруэнций (A_0A_3), (B_0B_3) и т. д., описанную около последовательности конгруэнций (A_2A_0), (A_0, A_1) и т. д. При $\omega^3 \neq 0$ каждый фокус A_3 новой последовательности описывает систему C^3.*

Первая часть теоремы непосредственно вытекает из формулы

$$A_3 = \omega^1 (a_3{}^1 A_1 + a_3{}^3 A_3) + \omega^2 (b_3{}^0 A_0 + b_3{}^3 A_3) + \omega^3 c_3^\alpha A_\alpha.$$

Действительно, отсюда следует, что касательные $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$ поверхности $\omega^3 = 0$, проведенные в точке A_3, проходят, соответственно, через точки A_1 и A_0, следовательно, образуют последовательность Лапласа, описанную около последовательности, которая происходит из конгруэнции (A_0A_1) при $\omega^3 = 0$.

Обозначая

$$\overline{B}_0 = A_3, \quad \overline{B}_1 = A_1, \quad \overline{B}_2 = A_2, \quad \overline{B}_3 = c_3{}^0 A_0 + c_3{}^0 A_1 + c_3{}^2 A_2,$$
$$d\overline{B}_\alpha = \overline{\Omega}_\alpha^\beta \overline{B}_\beta,$$

мы без труда обнаружим, что $\overline{\Omega}_j^k$ удовлетворяют уравнениям (2), откуда следует теорема.

4. Описанная последовательность вырождается, если три последовательные оси A_0A_3 сходятся в одной точке.

Примем в качестве вершин A_1, A_2 тетраэдра вторые фокусы лучей A_0A_1, A_0A_2 конгруэнций $\omega^3 = 0$. Допустим, что третьи оси, проведенные в точках A_2, A_0, A_1, сходятся, и примем за вершину A_3 их общую точку.

При подходящем нормировании приходим к системе

$$\begin{aligned} &\omega_1{}^2 = \omega^1, \ \omega_3{}^1 = c_3{}^1\omega^3, \ \omega_3{}^0 = c_3{}^0\omega^3, \ \omega_1{}^3 = a_1{}^3\omega^1 + c_1{}^3\omega^3, \ \omega_1{}^0 = a_1{}^0\omega^1 + b_1{}^0\omega^2, \\ &\omega_2{}^1 = \omega^2, \ \omega_3{}^2 = c_3{}^2\omega^3, \qquad \omega_2{}^3 = b_2{}^3\omega^2 + c_2{}^3\omega^3, \ \omega_2{}^0 = a_1{}^0\omega^1 + b_2{}^0\omega^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Система в инволюции и определяет систему C^3 с 4 произвольными функциями от двух аргументов и 9 функциями одного аргумента.

Подбирая подходящим образом точку B_1 на ребре B_0B_1, мы приведем формы Ω_i^α из формул (5) к виду (6). Отсюда следует, что третьи оси в точках $B_2 = A_0$, $B_0 = A_1$, B_1 проходят через точку $B_3 = A_3$. Следовательно, все оси последовательности $\omega^3 = 0$ сходятся.

Так как теперь

$$dA_3 = \omega^3 (c_3{}^0 A_0 + c_3{}^1 A_1 + c_3{}^2 A_2) + \omega_3{}^3 A_3,$$

то точка A_3 не двигается, если $\omega^3 = 0$, и описывает линию, если $\omega^3 \neq 0$.

Если $c_3{}^1$, $c_3{}^2$ равны нулю, то и $c_3{}^0$ обратится в нуль; точка A_3 будет неподвижной точкой пространства. Все поверхности (S_1), (S_2) суть конусы с общей вершиной A_3. Рассматриваемая система C^3 зависит от 4 произвольных функций двух аргументов и 6 функций одного аргумента.

5. Теорема 3. *Какова бы ни была последовательность Лапласа из трижды сопряженных систем, построенная относительно сети* $\omega^3 = 0$, *существует вполне определенная последовательность, вписанная в первоначальную последовательность так, что ее третьи оси совпадают с первыми и вторыми осями первоначальной.*

Если $C_i = A_i + \nu_i A_0$ $(i = 1, 2)$ суть два фокуса вписанной последовательности, то условие теоремы немедленно дает нам уравнения, определяющие ν_i:

$$[dC_i A_i A_0] \equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}, \qquad [dC_i C_1 C_2] \equiv 0 \pmod{\omega^i, \omega^3},$$

откуда следует $\nu_i = -c_i^3$, и оба других уравнения удовлетворены тождественно.

Если принять точки C_1, C_2 за вершины A_1, A_2 тетраэдра, получим $c_1^3 = c_2^3 = b_1^0 = a_2^0 = 0$. Без труда проверяется, что компоненты проективных перемещений тетраэдра, присоединенного к точке A_1, три ребра которого касаются координатных линий, удовлетворяют системе (2), откуда следует теорема.

Теорема 4. *Кроме последовательности теоремы 3, к каждой последовательности систем C^3, построенной относительно сети $\omega^3 = 0$, можно присоединить семейство вписанных последовательностей C^3 так, что каждые две последовательные третьи оси пересекают ось того же рода первоначальной последовательности в одной точке. Семейство зависит от трех произвольных функций от одного аргумента.*

Если $C_i = A_i + \nu_i A_0$ $(i = 1, 2)$ суть два последовательных фокуса вписанной последовательности, то условие теоремы выражается уравнениями

$$[dC_i C_1 C_2] \equiv 0 \pmod{\omega^i, \omega^3}, \qquad [dC_i C_i, A_3 + h_i A_0] \equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2} \quad (i = 1, 2)$$

где $h_1 = h_2$ — новая неизвестная функция. Отсюда вытекает

$$\begin{gathered}
[d\nu_1 + \nu_1 (\omega_0^0 - \omega_1^1) + \omega_1^0 - (b_1^2 + \nu_1)\nu_2\omega^2 - (c_1^3 + \nu_1) h_1\omega^3, \omega^1] = 0,\\
[d\nu_2 + \nu_2 (\omega_0^0 - \omega_2^2) + \omega_2^0 - (a_2^1 + \nu_2)\nu_1\omega^1 - (c_2^3 + \nu_2) h_2\omega^3, \omega^2] = 0,\\
[dh_1 + \omega_3^0 h_1 (\omega_0^0 - \omega_3^3) - \nu_1 (h_1 + a_3^1)\omega^1 - \nu_2 (h_1 + b_3^2)\omega^2, \omega^3] = 0.
\end{gathered}$$

Система в инволюции и определяет последовательность с тремя произвольными функциями от одного аргумента.

Поступило
8 VII 1946