Шур П. Г. (УО «ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **Е. З. Авакян,** канд. физ.-мат. наук, доцент

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ СИ

В настоящее время существует множество различных уравнений, решение которых может занять не один час, поэтому разработка программного обеспечения для их решения весьма популярна и продуктивна

Одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений является метод сеток.

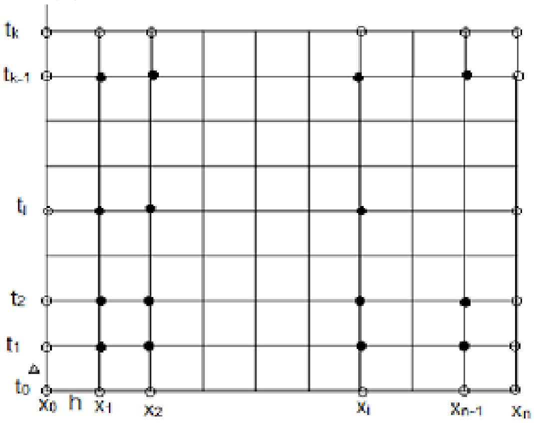

Рисунок 1 – Сетка Ω_h^Δ для области Ω с границей Γ

Рассмотрим разностные схемы решения параболических уравнений на примере следующего одномерного уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\ \ x,t\ \ , 0 \le x \le L, 0 \le t \le T,$$

$$u\ \ 0,t\ \ = \mu\ \ t\ \ , u\ \ L,t\ \ = \eta, 0 \le t \le T$$

$$u\ \ x,0\ \ = \varphi\ \ t\ \ , 0 \le x \le L$$

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \qquad (1)$$

где a^2– коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности материала стержня, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала.

Построим сетку Ω_h^Δ (рисунок 1). Для получения сеточного уравнения заменим производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ приближенной разностной формулой:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_i)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (2)$$

Для замены $\frac{\partial u}{\partial t}$ можно воспользоваться одной из приближенных разностных формул:

$$\frac{\partial u(x_i,t_i)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u(x_i,t_i)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h^2} \qquad (4)$$

Кроме того, заменим начальные и граничные условия их разностной аппроксимацией:

$$u_{i,0} = \varphi \ x_i \ = \varphi_i, i = 1,2,3,..,n, \qquad (5)$$

$$u_{0,j} = \mu \ t_j \ = \mu_j, u_{n,j} = \eta \ t_j \ = \eta_j, j = 1,2,3,..,k, \qquad (6)$$

заменив частные производные в задаче (1) соотношениями (2) и (3) и учитывая условия (5)–(6), получим следующую вычислительную схему для расчета значений функции и в узлах сетки Ω_h^Δ:

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i-1,j} + (1 - 2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i+1,j} + \Delta * f_{i,j} \qquad (7)$$

$$u_{0,j} = \mu_j, u_{n,j} = \eta_j, u_{i,0} = \varphi_i, \gamma = \frac{a^2\Delta}{h^2} \qquad (8)$$

Это явная двухслойная разностная схема (рис. 2). Учитывая, что на нулевом слое (при *i* = *0*) все значения $u_{0,j}$, (как, впрочем, и $u_{0,j}$, и $u_{n,i}$) известны, по формуле (7) можно сначала явно рассчитать значения $u_{i,1}$, затем $u_{i,2}$, и так до $u_{i,k}$. Для устойчивости разностной схемы (7) значения шагов по t и x должны удовлетворять следующему условию:

$$\Delta \leq \frac{h^2}{2a^2} \qquad (9)$$

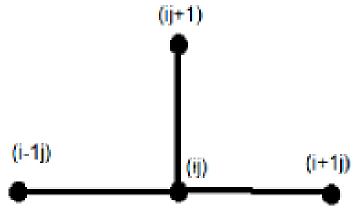

Рисунок 2 – Шаблон явной двухслойной разностной схемы

При решении параболических уравнений с помощью явной разностной схемы основной проблемой является устойчивость решения и правильный выбор шага по *t*, удовлетворяющего соотношению (9). Для решения этой проблемы были предложены неявные разностные схемы. Эти схемы абсолютно устойчивы, но алгоритм решения я несколько сложнее, чем простой пересчет по формуле (7). Для построения неявной разностной схемы заменим частные производные в задаче (1) соотношениями (2), (4) вместо (3) для явной схемы) и с учётом условий (5)–(6) получим следующую вычислительную схему для расчёта значений функции u в узлах сетки Ω_h^{Δ}:

$$Yu_{i-1,j} + (1 + 2Y)u_{i,j} + u_{i-1,j} = -u_{i-1,j} - \Delta * f_{i,j}, \quad (10)$$

соотношения (10) в месте с равенствами (7) – неявная двухслойная разностная схема (рисунок 3).

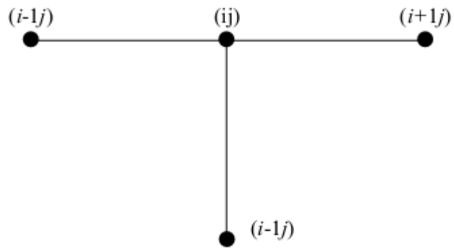

Рисунок 3 – Шаблон неявной двухслойной разностной схемы

Схема (8), (10) не позволяет явно выписывать решение, для нахождения $u_{i,j}$, при каждом значении j необходимо решить трёх-диагональную систему линейных алгебраических уравнений, для чего можно использовать одним из итерационных методов или методом прогонки.

В результате рассмотрения двух разностных схем получили:

Явная схема более простая и требует меньших затрат по времени для своей реализации, так же работа программы значительно быстрее, так как меньше операций выполняется. Однако значительным ее минусом является то, что она не всегда сходится, а значит не всегда возможно найти решение.

Неявная схема требует более сложной реализации, при выполнении требуется больше времени из-за большего количества операций. Но всеми этими минусами можно пренебречь, так как нет никаких ограничений для решения, всегда возможно решить уравнение. Как и при всех расчетах при помощи численных методов существует такой минус, как погрешность, было проведено исследование и рассчитаны решения при разной погрешности.

Литература

1. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.