Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

ТЕРМОДИНАМИКА

П. В. ЧЕРПАКОВ

К ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 2 VIII 1940)

В настоящей работе сделана попытка исследования теплообмена в потоке с точки зрения теорий турбулентности Прандтля и Кармана (1), относящихся к движению жидкости в круглой трубе при больших скоростях и значениях чисел Рейнольдса, доходящих до $3 \cdot 10^6$. Подобного рода задача имеется в работе Лацко (2), но полученное им решение пригодно только к области действия закона сопротивления Блазиуса, т. е. для чисел Рейнольдса, не превосходящих 10^5.

Для потока в трубе радиуса r_0 величину касательного напряжения согласно теории Прандтля можно представить так:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \tag{1}$$

где u—скорость, ρ—плотность, r—переменное расстояние от оси и l—длина пути перемешивания.

Карман, предполагая механическое подобие в турбулентном потоке, приближенно считает $l = k\frac{u'}{u''}$, однако вблизи стенки, как предлагает Прандтль, можно принять $l = kr_1$, причем k—постоянная величина и r_1—переменное расстояние от стенки.

Интегрирование уравнения (1) позволяет установить распределение скоростей в потоке и именно при развитой турбуленции, так как одно произвольное постоянное в общем решении определяется в зависимости от условия, что при больших числах Рейнольдса вблизи стенки градиент скорости очень велик.

В случае $l = kr_1$ распределение скоростей будет:

$$u = u_m + \frac{v_*}{k} \ln\left(1 - \frac{r}{r_0}\right). \tag{2}$$

Здесь u_m—максимальная скорость на оси и $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, где τ_0—касательное напряжение у стенки.

Опыты Никурадзе (1) установили, что уравнение (2) хорошо согласуется с кривой распределения скоростей, полученной из наблюдений, только надо считать $k = 0{,}4$. Пусть T—температура, тогда для теплового потока имеем:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \tag{3}$$

Согласно гипотезе Ньютона величину касательного напряжения представляют в таком виде:

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{4}$$

По Карману и Лацко, если считать λ и μ некоторыми функциями r, можем назвать λ «турбулентным коэффициентом теплопроводности» и μ — «турбулентным коэффициентом вязкости». По принципу аналогии трения и теплопередачи, высказанному еще Рейнольдсом, между этими величинами предполагается наличие зависимости в виде $\frac{\mu c_p}{\lambda} = 1$, где c_p — теплоемкость. Эта гипотеза оказалась весьма плодотворной при изучении теплообмена в газовых потоках.

Из сравнения (1) и (4) находим:

$$\mu = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{5}$$

Затем, после вычислений установим:

$$\lambda = k c_p \rho r_0 v_* \left(1 - \frac{r}{r_0}\right). \tag{6}$$

В известное уравнение теплопередачи подставляем величины λ и u, после чего получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\frac{\partial T}{\partial r}\right] = \frac{1}{kR_*}\left[R_m + \frac{R_*}{k}\ln\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right]\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{7}$$

где $R_m = \frac{u_m r_0}{\nu}$, $R_* = \frac{v_* r_0}{\nu}$ — параметры Рейнольдса, отнесенные соответственно к максимальной и динамической скорости, и ν — кинематическая вязкость.

Граничные условия поставим следующие: $T\Big|_{r=r_0} = 0$ и $\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$. Подстановкой $T = e^{-\omega z} f(x)$ уравнение (7) сводим к такому:

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x)\frac{df}{dx}\right] + \omega^*\left[R_m + \frac{R_*}{k}\ln(1-x)\right] xf = 0. \tag{8}$$

Здесь $x = \frac{r}{r_0}$ и $\omega^* = \frac{\omega r_0}{kR_*}$ — неопределенный параметр, соответственно выступят граничные условия $f(1) = 0$ и $f'(0) = 0$. Приближенное решение уравнения (8) можно получить по методу Ритца, сводя задачу к вариационной проблеме:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \left\{x(1-x)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \omega^*\left[R_m + \frac{R_*}{k}\ln(1-x)\right] xf^2(x)\right\} dx = \min. \tag{9}$$

Положим:

$$f(x) = a_1(1-x^2) + a_2(1-x^2)^2 + \ldots \tag{10}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями (10), находим значение первого характеристического числа, которое будет:

$$\omega_0 = \frac{1{,}2k^2 R_*}{kR_m - 0{,}7R_*} \cdot \frac{1}{d}.$$

Подробные вычисления показывают, что если ограничиться одним приближением, то значение ω_0 мало отличается от того, которое получается при двух приближениях, следовательно, величина ω_0 незначительно изменится, если взять достаточно большое число приближений. Известное соотношение между максимальной и средней скоростями позволяет установить зависимость между параметрами Рейнольдса в виде

$R_m = Re + 3{,}75 R_*$, что дает возможность в выражении для ω_0 ввести $Re = \frac{\bar{u} r_0}{\nu}$ — параметр Рейнольдса, отнесенный к средней скорости.

По установленной нами формуле ([4]) $N_\infty = \frac{Pe\, d}{4}\, \omega_0$ найдем предельное значение параметра Нуссельта в таком виде:

$$N_\infty = \frac{0{,}12 Pe \cdot R_*}{2Re + 4R_*}\,. \tag{11}$$

Если воспользоваться известным соотношением $\tau_0 = \frac{\xi \rho \bar{u}^2}{8}$, где ξ — коэффициент сопротивления, то формулу (11) можно представить так:

$$N_\infty = 0{,}12 Pe\, \eta; \tag{12}$$

здесь $\eta = \frac{\sqrt{\xi}}{2\sqrt{8} + 4\sqrt{\xi}}$, а $\sqrt{\xi} = \frac{R_*}{\sqrt{8 Re}}$.

Область закона Блазиуса

Re	ξ	η
10^4	0,03160	0,02792
$4 \cdot 10^4$	0,02235	0,02390
$9 \cdot 10^4$	0,01824	0,02185

Область закона Никурадзе

Re	ξ	η
10^5	0,01763	0,02146
$5 \cdot 10^5$	0,01206	0,01801
$10 \cdot 10^5$	0,01162	0,01784
$15 \cdot 10^5$	0,01079	0,01711
$20 \cdot 10^5$	0,01046	0,01686

Элементарная теория теплообмена ([4], [5]) приводит к несколько иной зависимости между критерием Нуссельта и коэффициентом сопротивления, а именно:

$$Nu = 0{,}125 Pe\, \xi. \tag{13}$$

Это же соотношение в основном воспроизводит и предельное значение параметра Нуссельта, полученное из решения Лацко ([2]), где только надо считать согласно закону Блазиуса

$$\xi = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}\,.$$

Для сравнения величин ξ и η приводим таблицу, где в области чисел Рейнольдса свыше 10^5 расчеты проведены по формуле Никурадзе ([1]).

Из приведенной таблицы легко усмотреть, что в области действия закона Блазиуса формула (12) хорошо согласуется с формулой (13).

Для больших чисел Рейнольдса эти формулы дают заметное расхождение численных результатов, причем по формуле (12) наблюдаем менее резко выраженное спадение теплообмена.

Воронежский государственный университет

Поступило
3 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Проблемы турбулентности, стр. 75—150 (1936). [2] H. Latzko, Z. a. M. M., I (1921). [3] П. В. Черпаков, ДАН, XXIX, № 4 (1940). [4] М. Ф. Широков, Изв. ВТИ, 9 (1935). [5] H. Lorenz, Phys. ZS., XXXVIII, 5, 446 (1927).