Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

ТЕРМОДИНАМИКА

П. В. ЧЕРПАКОВ

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 2 VIII 1940)

Как известно, температурное поле в движущейся среде при установившемся режиме можно охарактеризовать решением уравнения

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c_p \rho (w \operatorname{grad} T), \tag{1}$$

где T — температура потока, w — вектор скорости, c_p — теплоемкость, ρ — плотность и λ — коэффициент теплопроводности, величина постоянная или функция координат.

Уравнение (1) для случая круглой трубы радиуса r_0 после преобразований к цилиндрическим координатам (r, φ, z) приводим к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = c_p \rho r u \frac{\partial T}{\partial z}; \tag{2}$$

здесь u — компонента вектора w — величина постоянная или функция r.

Причем, в силу аксиальной симметрии и незначительной роли тепла, переносимого вследствие теплопроводности в направлении скорости движения, было положено $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0$.

Для функции $T(r, z)$ предположим однородные граничные условия. Подстановкой $T = e^{-\omega z} f(r)$ сведем уравнение (2) к уравнению типа Штурма-Лиувилля,

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{df}{dr}\right) + \omega c_p \rho r u f = 0, \tag{3}$$

в котором $f(r)$ — неизвестная функция и ω — неопределенный параметр. Граничные условия и для $f(r)$ будут однородные. Подобного рода уравнение подробно исследовано ([1]), и установлено существование спектра характеристических чисел и существование первого из них. Кроме того для уравнения (3) эти числа положительны и могут быть расположены в возрастающем порядке:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$$

Решения уравнения (3) образуют систему фундаментальных функций, которые обозначим $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ Тогда решение уравнения (2) определяет температурное поле в таком виде:

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\omega_n z} f_n(r), \tag{4}$$

где коэффициенты a_n находятся в зависимости от условия $T = F(r)$ — температуры в начале трубы.

Коэффициент теплоотдачи обычно вычисляют по формуле:

$$\alpha = \frac{q_0}{\overline{T}}, \tag{5}$$

где q_0 — удельный поток тепла в направлении, нормальном к стенке трубы, а $\overline{T}$ — средняя температура по сечению z. Эти величины определяют так:

$$\overline{T} = \frac{\int\limits_0^{r_0} Tur\,dr}{\int\limits_0^{r_0} ur\,dr} \quad \text{и} \quad q_0 = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}. \tag{6}$$

Однако, если из дифференциального уравнения (2) найти значение $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}$, то получим

$$q_0 = -\frac{c_p \rho}{r_0} \int\limits_0^{r_0} \frac{\partial T}{\partial z} ur\,dr. \tag{7}$$

Воспользовавшись выражением для средней скорости $\bar{u} = \frac{2}{r_0^2} \int\limits_0^{r_0} ur\,dr$, соотношениями (5), (6) и (7) можно получить формулу для параметра Нуссельта в таком виде:

$$Nu = -\frac{Pe \cdot d}{4} \frac{\int\limits_0^{r_0} \frac{\partial T}{\partial z} ur\,dr}{\int\limits_0^{r_0} Tur\,dr}, \tag{8}$$

здесь $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$ — параметр Нуссельта, $Pe = \frac{c_p \rho d \bar{u}}{\lambda}$ — параметр Пекле и d — диаметр трубы.

Подставляя в формулу (8) выражение (4), получим значение локального коэффициента теплоотдачи или соответствующей величины параметра Нуссельта, как функции температурного поля в целом. Представляя среднее значение параметра по длине трубы в виде

$$\overline{Nu} = \frac{1}{l} \int\limits_0^{l} Nu\,dz,$$

после подстановки соотношения (8) и вычислений получим

$$\overline{Nu} = \frac{Pe \cdot d}{4l} \ln \frac{T_0}{T_l},$$

где T_0 и T_l — значения средней температуры при $z = 0$ и $z = l$. Кроме того величину $\overline{Nu}$ можно представить в зависимости от температурного поля (4) таким образом:

$$\overline{Nu} = \frac{Pe \cdot d}{4} \left[\omega_0 + \frac{1}{l} \ln \frac{a_0 \bar{f}_0 + a_1 \bar{f}_1 e^{-(\omega_1 - \omega_0) l} + \ldots + a_n \bar{f}_n l^{-(\omega_n - \omega_0) l} + \ldots}{a_0 \bar{f}_0 + a_1 \bar{f}_1 + \ldots + a_n \bar{f}_n + \ldots} \right], \tag{10}$$

где $\bar{f}_n = \int\limits_0^{r_0} f_n(r)\, ur\,dr$, а остальные величины ранее определены.

Выражение (10) имеет смысл, если числовой ряд, стоящий в знаменателе под знаком логарифма, есть сходящийся. Сходимость же этого ряда будет вполне обеспечена при условии равномерной сходимости ряда, получающегося из соотношения (4) при $z=0$, благодаря чему возможно почленное интегрирование. Тогда равномерную сходимость ряда, стоящего в числителе, для любого значения $l \geqslant 0$ легко доказать на основании теоремы Абеля ([2]). После чего возможно осуществить в соотношении (10) предельный переход при $l \to \infty$. Обозначив $\lim\limits_{l\to\infty} \overline{Nu} = N_\infty$, в пределе получим

$$N_\infty = \frac{Pe \cdot d}{4}\,\omega_0. \tag{11}$$

Из сравнения соотношений (9) и (11), очевидно, $\omega_0 = -\lim\limits_{l\to\infty} \frac{\ln T_l}{l}$. Таким образом можно утверждать, что предельный коэффициент теплоотдачи и соответствующая величина критерия Нуссельта являются функциями только первого характеристического числа уравнения (3), т. е. не являются функциями температурного поля в целом, например, совершенно не зависят от температуры при $z=0$. Причем эти величины практически можно считать совпадающими со средними величинами для соответственно подобранной длины трубы.

Если воспользоваться решением Нуссельта ([3]) для температурного поля при ламинарном течении потока, где значение первого характеристического числа будет $\omega_0 = \frac{14{,}627}{Pe \cdot d}$, то по формуле (11) найдем $N_\infty = 3{,}66$.

Подобным образом, использовав решение Лацко ([4]), для случая турбулентного потока установим $N_\infty = 0{,}0377\, Pe\, Re^{-\frac{1}{4}}$. Точно такие же значения в рассмотренных примерах получают несколько иначе.

Полученные формулы (8), (10) и (11) пригодны для любого вида течения в круглой трубе при условии осевой симметрии.

Пока определение коэффициента теплоотдачи производилось без учета переноса тепла вследствие теплопроводности вдоль оси, однако применяемый нами метод позволяет в частных случаях учесть влияние на теплопередачу и этого фактора.

Остановимся на случае течения потока с постоянной скоростью. Тогда уравнение теплопередачи будет:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{v}{a}\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{12}$$

Здесь $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ и скорость v — величины постоянные. Пусть краевые условия будут $T(r_0) = 0$, $T = 0$ при $z \to \infty$ и $T = T_0$ при $z = 0$.

Определяя коэффициент теплоотдачи по формулам (6) и (7), найдем

$$\alpha = -\frac{\lambda r_0}{2} \frac{\int\limits_0^{r_0} \left(\frac{v}{a}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) r\,dr}{\int\limits_0^{r_0} Tr\,dr}. \tag{13}$$

Если обозначим $\theta = \int\limits_0^{r_0} Tr\,dr$ и $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$, то после вычислений из соотношения (13) установим:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{v}{a}\frac{d\theta}{dz} - \frac{Nu}{r_0^2}\theta = 0. \tag{14}$$

Решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям, будет:

$$\theta = \theta_0 e^{\left(\frac{v}{2a} - \sqrt{\frac{v^2}{4a^2} + \frac{Nu}{r_0^2}}\right) r}. \tag{15}$$

Откуда легко получить

$$Nu = \left(\frac{d}{2l} \ln \frac{\theta_0}{\theta_l}\right)^2 + \frac{Pe \cdot d}{4l} \ln \frac{\theta_0}{\theta_l}. \tag{16}$$

При сравнении выражения (16) с формулой (9) можно констатировать, что перенос тепла кондукцией вдоль оси учитывается первым слагаемым. При малых значениях l, т. е. в начальном участке трубы, влияние первого члена может сказываться на теплопередаче. Температурное поле представим в форме решения уравнения (12) таким образом:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\omega_n z} J_0(\mu_n x), \tag{17}$$

где $x = \frac{r}{r_0}$, $J_0(\mu_n x)$ — функция Бесселя первого рода, μ_n — нули этой функции, $\omega_n = \frac{v}{2a} - \sqrt{\frac{v^2}{4a^2} + \frac{\mu_n^2}{r_0^2}}$, если $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \neq 0$, и $\omega_n = \frac{a}{v}\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2$, если $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$, а коэффициенты $a_n = \frac{2T_0}{\mu_n J_1(\mu_n)}$.

Точные вычисления приводят к одному значению предельного параметра Нуссельта при различных величинах ω_n, которое будет $N_\infty = 5{,}76$.

Следовательно, перенос тепла кондукцией не сказывается на предельном значении величины критерия Нуссельта в рассматриваемом случае теплового потока.

Воронежский государственный университет

Поступило
3 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, стр. 301—326 (1939). [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, стр. 26—28. [3] W. Nusselt, VDI, S. 1154—1158 (1910). [4] H. Latzko, Z. a. M. M., Bd. I, H. 4, S. 268—290 (1921).