Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Я. ХУРГИН и Н. ЩЕТИНИН

О ЗАМКНУТЫХ ПОДКОЛЬЦАХ КОЛЬЦА ФУНКЦИЙ С n НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 VII 1940)

Stone ([1]) и Г. Е. Шилов ([2]), рассматривая топологическое кольцо всех действительных непрерывных функций (C), дали необходимое и достаточное условие совпадения замкнутого подкольца этого кольца со всем кольцом. В настоящей заметке будет доказана аналогичная теорема для топологического кольца действительных непрерывных функций с n непрерывными производными (D_n; $n=1, 2, \ldots$), заданных на отрезке $[0, 1]$. Сходимость в D_n определяется как равномерная сходимость функций и всех n производных соответственно.

Будут рассматриваться подкольца R_n кольца D_n, обладающие следующими свойствами:

1. $x(t) \equiv 1 \subset R_n$.
2. Если $x(t) \subset R_n$, то $\lambda x(t) \subset R_n$ при любом действительном λ.
3. R_n замкнуто, т. е. предел последовательности функций из R_n также содержится в R_n, если эта последовательность сходится в смысле сходимости в D_n.

Лемма 1. *Если* $x(t) \subset R_n$, *то и* $|x(t)|^{2n+1} \subset R_n$.

Без ограничения общности можно считать, что $|x(t)| < 1$.

Напишем очевидные равенства:

$$|x(t)|^{2n+1} = x^{2n}|x| = x^{2n}\sqrt{1-(1-x^2)} = x^{2n}\sum_{m=0}^{\infty} a_m (1-x^2)^m,$$

где a_m — коэффициенты биномиального ряда.

Если выражение, стоящее справа, продифференцировать формально n раз, то, как легко проверить, полученный ряд будет сходиться равномерно и, следовательно, представляет n-ую производную левой части. Из условия 3 следует, что $|x(t)|^{2n+1} \subset R_n$.

Предположим, что R_n обладает свойством разделимости: для каждой пары точек отрезка $[0, 1]$ можно указать функцию из R_n, принимающую в них различные значения. Тогда верна

Лемма 2. *Какова бы ни была точка* $\xi \subset [0, 1]$, *найдется такая функция* $x_\xi(t) \subset R_n$, *что* $x_\xi(\xi) < x_\xi(t)$ *для всех* $t \neq \xi$.

Для каждой точки $\eta \subset [0, 1]$ и отличной от ξ по свойству разделимости можно указать такую функцию $y(t) \subset R_n$, что $y(\xi) \neq y(\eta)$. Тогда функция

$$y_\eta(t) = (y(t) - y(\xi))^2$$

обладает следующими свойствами:

$$y_\eta(t) \geqslant 0; \quad y_\eta(\xi) = 0; \quad y_\eta(\eta) > 0.$$

Из непрерывности $y_\eta(t)$ следует существование интервала, окружающего точку η, в котором $y_\eta(t) > 0$. По теореме Бореля-Лебега из этой системы интервалов, покрывающих отрезок $[0, 1]$ без точки ξ, можно выбрать счетную систему интервалов и соответствующую последовательность функций

$$y_{\eta_1}(t), \quad y_{\eta_2}(t), \ldots, y_{\eta_k}(t), \ldots,$$

причем для каждой точки $\eta \neq \xi$ найдется некоторая функция $y_{\eta_k}(t)$, такая, что $y_{\eta_k}(\eta) > 0$. Теперь искомая функция $x_\xi(t)$ представится как сумма ряда

$$x_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_{\eta_k}(t),$$

где λ_k — положительные числа, выбранные так, чтобы ряд сходился в смысле сходимости в D_n.

Лемма 3. *Для любой пары точек* $\eta, \xi \subset [0, 1]$ *можно указать функцию* $x_{\eta\xi}(t) \subset R_n$, *такую, что*

$$x_{\eta\xi}(t) \begin{cases} = 0 \text{ на } [0, \eta] \\ \text{заключена между 0 и 1 на } (\eta, \xi) \\ = 1 \text{ на } [\xi, 1]. \end{cases}$$

Для определенности будем считать, что $\eta < \xi$. Рассмотрим функцию $x_\xi(t) \subset R_n$, определенную в лемме 2, и обозначим

$$m = \min_{0 \leqslant t \leqslant \eta} x_\xi(t).$$

Очевидно, что $m > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$y_\eta(t) = |x_\xi(t) - m|^{2n+1} - (x_\xi(t) - m)^{2n+1},$$

которая обладает свойствами

$$y_\eta(t) \begin{cases} = 0 \text{ на } [0, \eta], \\ > 0 \text{ на некотором интервале, окружающем точку } \xi, \\ \geqslant 0 \text{ на } [0, 1]. \end{cases}$$

Зафиксируем η и пусть ξ пробегает весь отрезок $[\xi, 1]$. Получаем покрытие отрезка $[\xi, 1]$; по лемме Гейне-Бореля можно выбрать конечное покрытие отрезка $[\xi, 1]$ интервалами и соответствующие функции

$$y_{\eta_1}(t), \; y_{\eta_2}(t), \ldots, y_{\eta_k}(t),$$

определяющие функцию

$$y(t) = \sum_{m=1}^{k} y_{\eta_m}(t),$$

которая положительна на отрезке $[\xi, 1]$.

Теперь искомая функция $x_{\eta\xi}(t)$ представится как

$$x_{\eta\xi}(t) = \frac{1}{2M}\{(y(t) - M)^{2n+1} - |y(t) - M|^{2n+1} + 2M\},$$

где

$$M = \min_{\xi \leqslant t \leqslant 1} y(t).$$

Теорема 1. *Для того, чтобы подкольцо R_n совпадало со всем кольцом D_n, необходимо и достаточно, чтобы R_n обладало свойствами:*

1) *разделимости,*

2) *для каждой точки $\xi \subset [0, 1]$ можно указать функцию $x(t) \subset R_n$ такую, что $x'(\xi) \neq 0$.*

Необходимость. Если R_n совпадает с D_n, то, например, функция $x(t) \equiv t \subset R_n$, которая принимает различные значения в различных точках отрезка $[0, 1]$ и имеет всюду положительную производную, принадлежит R_n.

Достаточность. a) Покажем, что в R_n существует функция с всюду положительной производной. Из свойства 2) и непрерывности $x'(t)$ следует существование $\delta > 0$, такого, что $x'(t) > 0$ в интервале $(\xi - 2\delta, \xi + 2\delta)$. Рассмотрим функцию

$$x_1(t) = |x(t) - x(\xi - \delta)|^{2n+1} + (x(t) - x(\xi - \delta))^{2n+1}.$$

В интервале $(\xi - 2\delta, \xi - \delta)$ $x_1(t) \equiv 0$. Определим функцию

$$x_2(t) = x_1(t)\, x_{(\xi - 2\delta), (\xi - \delta)}(t),$$

где $x_{(\xi-2\delta),(\xi-\delta)}(t)$ — функция, построенная в лемме 3.

$x_2(t) \equiv 0$ на отрезке $[0, \xi - \delta]$ и в интервале $(\xi - \delta, \xi + 2\delta)$ $x_2'(t) > 0$.

Аналогично «обрежем» функцию $x_2(t)$ справа от интервала $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Для этого определим функцию:

$$x_3(t) = (x_2(t) - x_2(\xi + 2\delta))^{2n+1} - |x_2(t) - x_2(\xi - \delta)|^{2n+1}.$$

В интервале $(\xi + \delta, \xi + 2\delta)$ функция $x_3(t) \equiv 0$. Производная $y_\xi'(t)$ функции $y_\xi(t) = x_3(t)(1 - x_{(\xi+\delta),(\xi+2\delta)}(t))$ равна нулю всюду кроме интервала $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, в котором она положительна.

По лемме Гейне-Бореля можно выбрать конечную систему интервалов $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ с соответствующими функциями $y_{\xi_1}(t), y_{\xi_2}(t), \ldots, y_{\xi_n}(t)$, сумма которых

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} y_{\xi_k}(t)$$

имеет всюду положительную производную.

Замечание. Легко видеть, что, если $x(t) \subset R_n$ и $F(x)$ непрерывная функция с n непрерывными производными, определенная на множестве значений функции $x(t)$, то $F[x(t)] \subset R_n$.

b) Пусть $z(t)$ — произвольная функция из D_n. Покажем, что $z(t) \subset R_n$, чем и будет доказана теорема.

Обозначим $y^{-1}(t)$ функцию, обратную функции $y(t)$, определенную выше. Функция $y^{-1}(t)$ непрерывна с n непрерывными производными и определена на множестве значений $y(t)$. В силу замечания $y^{-1}[y(t)] \subset t \subset R_n$. По теореме Вейерштрасса $z^{(n)}(t)$ можно равномерно аппроксимировать полиномами от τ, откуда (по свойству замкнутости R_n) следует, что $z(t) \subset R_n$.

Следующие теоремы, полученные Stone'ом ([1]) и Г. Е. Шиловым ([2]), легко доказываются тем же методом, что и теорема 1.

Теорема 2*. *Для того, чтобы подкольцо R кольца C совпадало со всем кольцом C, необходимо и достаточно выполнение свойства разделимости в R.*

(R подчинено тем же требованиям 1, 2, 3, что и R_n; сходимость в C определяется, как равномерная сходимость функций).

Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $z(t)$ — произвольная непрерывная функция. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ на интервалы (ξ_i, ξ_{i+1}) равномерной непрерывности, $z(t)$ для данного $\varepsilon > 0$. Как легко видеть,

$$\left| z(t) - \left\{ z(0) + \sum_i [z(\xi_{i+1}) - z(\xi_i)]\, x_{\xi_i \xi_{i+1}}(t) \right\} \right| < \varepsilon,$$

где $x_{\xi_i \xi_{i+1}}(t)$ — функция, определенная в лемме 3.

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть функция из R; в силу произвольности ε $z(t)$ равномерно аппроксимируется последовательностью таких функций, чем и доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть S — бикомпактное хаусдорфовское пространство и пусть $C(S)$ — кольцо всех действительных непрерывных функций, заданных на пространстве S. Тогда для того, чтобы подкольцо $R(S)$ совпадало со всем кольцом $C(S)$, необходимо и достаточно выполнение свойства разделимости в $R(S)$.*

Эта теорема доказывается тем же методом, что и теорема 2, если передоказать леммы 1, 2, 3, заменив всюду отрезок $[0, 1]$ пространством S. Формулировки и доказательства лемм нужно несколько видоизменить, учитывая особенности пространства S.

Поступило
5 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Stone, Trans. Am. Math. Soc., 41 (1937). [2] Г. Е. Шилов, ДАН, XXII, № 1 (1939).

* В доказательстве этой теоремы, как частный случай, содержится лебеговское доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами.