Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. И. ШЕРМАН

НЕКОТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 VIII 1940)

Предположим, что в пространстве xyz имеется некоторый объем V, ограниченный совокупностью $m+1$ замкнутых поверхностей S_j $(j=1, \ldots, m+1)$. Как известно, решение задачи Дирихле для такой области, вообще говоря, не может быть представлено потенциалом двойного слоя. Как правило, это решение может быть получено лишь в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя. При этом потенциал простого слоя сам по себе определяется довольно сложным образом и требует предварительного решения задачи Robin'a (1). Ниже мы покажем, каким образом последнее затруднение можно обойти и получить, следовательно, более простым способом решение задачи Дирихле.

Условимся, для определенности, объем V считать конечным. Полную поверхность, ограничивающую объем V, равную $\sum\limits_{1}^{m+1} S_j$, обозначим через S, причем S_{m+1} будем считать внешней поверхностью, содержащей внутри себя все остальные S_j $(j=1, \ldots, m)$. Наконец, объемы (внешние к V), ограниченные поверхностями S_j, обозначим через V_j $(j=1, \ldots, m+1)$.

Искомую гармоническую в V функцию $u(x, y, z)$ ищем в следующем виде:

$$u(x, y, z) = \int\limits_S \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu \, dS, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $r_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}$; $M(\xi, \eta, \zeta)$ — точка поверхности S, а $M(x_j, y_j, z_j)$ — произвольно фиксированная точка, лежащая внутри V_j $(j=1, \ldots, m)$; нормаль n считаем направленной изнутри V во вне.

Перейдем в равенстве (1) к пределу, устремляя точку $M(x, y, z)$ к произвольной точке $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ поверхности S. Тогда при заданных $u(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ получим для определения плотности ν интегральное уравнение Фредгольма. Не трудно доказать, что это уравнение разрешимо. Действительно, рассматривая соответствующее ему однородное уравнение, будем иметь, что везде в пространстве V:

$$\int\limits_S \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu \, dS = 0. \tag{2}$$

Левую часть последнего равенства обозначим через $u^*(x, y, z)$. Рассматривая функцию $u^*(x, y, z)$ в пространствах V и V_{m+1} легко убеждаемся, что $\frac{du^*}{dn}$ остается непрерывной при переходе из V в V_{m+1} через S_{m+1}. Поэтому, учитывая обращение функции $u^*(x, y, z)$ в нуль на бесконечности, будем иметь, что $u^*(x, y, z)=0$ всюду в V_{m+1}. Отсюда, сравнивая с (2), найдем, что $\nu=0$ на S_{m+1}. После этого из (2) получим:

$$\sum_1^m \left\{ \int\limits_{S_j} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu\, dS \right\} = 0,$$

что можно записать еще так:

$$\int\limits_{S_e} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{r_e} \int\limits_{S_e} \nu\, dS = -\sum_1^{m}{}' \left\{ \int\limits_{S_j} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu\, dS \right\}, \tag{3}$$

где e — любое фиксированное число из ряда $1, \ldots, m$; штрих над Σ указывает на пропуск при суммировании члена, соответствующего $j=e$.

Введем во внешности S_j функцию

$$u_j(x, y, z) = \int\limits_{S_j} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu\, dS \qquad (j=1, \ldots, m). \tag{4}$$

Левая часть равенства (3) есть функция, гармоническая вне S_e; наоборот, правая часть того же равенства есть функция, гармоническая внутри S_e. Поэтому функция $u_e(x, y, z)$ будет гармонической во всем пространстве и, следовательно (обращаясь в нуль на бесконечности), всюду тождественно равной нулю. Итак, теперь имеем:

$$\int\limits_{S_j} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{1}{r_j} \int\limits_{S_j} \nu\, dS = 0 \quad \text{вне} \quad S_j\,(j=1, \ldots, m). \tag{5}$$

Рассматривая последнее равенство на бесконечности и учитывая порядок обращения в нуль отдельных слагаемых, без труда обнаружим, что оно распадается на следующие:

$$\int\limits_{S_j} \nu \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = 0, \qquad \int\limits_{S_j} \nu\, dS = 0\,(j=1, \ldots, m). \tag{6}$$

Отсюда же легко вытекает, что $\nu=0$ и на остальных поверхностях $S_j\,(j=1, \ldots, m)$.

Таким образом однородное уравнение имеет только тривиальное решение и, значит, неоднородное уравнение разрешимо относительно ν единственным образом. Определив ν, найдем по формуле (2) искомую функцию $u(x, y, z)$.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР

Поступило
5 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. M. Gunther, La théorie du potentiel, Paris (1934).