Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VII 1940)

§ 1. Рассмотрим область D полупространства (x, y, z), $z \geqslant 0$, ограниченную областью B плоскости XOY и цилиндром G, образующие которого параллельны оси OZ. Примем, что направляющая L цилиндра, являющаяся одновременно и границей области B, есть выпуклая аналитическая кривая без особых точек с отличной от нуля кривизной. Поставим задачу: найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

удовлетворяющее в области B начальным условиям

$$U(x, y, 0)=F(x, y), \quad U_z(x, y, 0)=\varphi(x, y), \tag{2}$$

а на цилиндре G — граничным условиям

$$U=\psi(x, y, z) \tag{3$_1$}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\chi(x, y, z). \tag{3$_2$}$$

Положим

$$V=\ln\left(\frac{z_0-z}{r}+\sqrt{\frac{(z_0-z)^2}{r^2}-1}\right), \quad r^2=(x_0-x)^2+(y_0-y)^2. \tag{4}$$

V — фундаментальное решение волнового уравнения, введенное Volterra.

Пусть σ' — площадка, вырезанная конусом характеристик

$$z_0-z=r \tag{5}$$

из цилиндра G. Если точка (x_0, y_0, z_0) — вершина конуса (5) — попадет на цилиндр, то соответствующую площадку σ' будем обозначать через σ_0.

§ 2. Введем в рассмотрение интегралы, аналогичные потенциалам, определенные в полупространстве $z \geqslant 0$:

$$W_1(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma'} P(M)\frac{\partial V}{\partial z_0}\,dS=\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma'}\frac{P(M)\,dS}{\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}}, \tag{6}$$

$$W_2(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma'} Q_z(M)\frac{\partial V}{\partial n}\,dS, \tag{7}$$

где n — направление внешней нормали к G.

Если конус (6) не пересекается в D с цилиндром G, так что площадка σ' исчезает, мы положим по определению $W_1 \equiv 0$, $W_2 \equiv 0$. Относительно функций P и Q примем, что они непрерывны на G и имеют достаточное число производных по z и по u, где u — длина дуги кривой L. Примем еще, что эти функции обращаются в нуль при $z=0$.

Для функций (6) и (7) справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *В области D и в ее дополнении функции W_1 и W_2 непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка. Эти функции удовлетворяют в каждой из указанных областей волновому уравнению* (1) *и начальным условиям:*

$$W_1(x, y, 0) = W_{1z}(x, y, 0) = 0; \quad W_2(x, y, 0) = W_{2z}(x, y, 0) = 0.$$

Теорема 2 *Если $M_0 \in G$, то справедливы равенства:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_1^{(i)}(M_0)}{\partial n_0} &= \frac{1}{2} P(M_0) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_0} P_z(M) \frac{\partial V}{\partial n_0} dS, \\ \frac{\partial W_1^{(e)}(M_0)}{\partial n_0} &= -\frac{1}{2} P(M_0) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_0} P_z(M) \frac{\partial V}{\partial n_0} dS; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} W_2^{(i)}(M_0) &= -\frac{1}{2} Q(M_0) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_0} Q_z(M) \frac{\partial V}{\partial n} dS, \\ W_2^{(e)}(M_0) &= \frac{1}{2} Q(M_0) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_0} Q_z(M) \frac{\partial V}{\partial n} dS. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь n_0 — направление внешней нормали к G в точке M_0. Индексы i и e показывают, что нужно брать предел изнутри, соответственно, извне D.

§ 3. На цилиндре G введем в качестве координат z и u. При этом G отобразится на некоторую часть плоскости (u, z). Площадка σ_0 отобразится на криволинейный треугольник (который мы тоже будем обозначать через σ_0), одна из сторон которого лежит на оси u. Боковые стороны такого треугольника с вершиной в некоторой точке N мы будем называть $N\alpha_1$-кривыми.

Можно показать, что $M_0\alpha_1$-кривые имеют точку перегиба в M_0. Касательные к ним в точке перегиба наклонены к оси u под углами соответственно 45° и 135°. Ниже M_0 кривые расположены над касательными, выше M_0 — под касательными. $M_0\alpha_1$-кривую, касательная к которой в точке M_0 наклонена к оси u под углом в 45° (135°), будем называть левой (правой) $M_0\alpha_1$-кривой. При z_0 достаточно малом, каким мы его и будем предполагать, верхняя ветвь $M_0\alpha_1$-кривой вогнута книзу, а нижняя ветвь вогнута кверху.

Введем счетное множество семейств кривых $M_0\alpha_k$, которые построим следующим образом. Пусть линии $M_0\alpha_\nu$, $\nu < k$, построены. Нижней ветвью левой (правой) $M_0\alpha_k$-кривой назовем геометрическое место точек N таких, что верхняя ветвь левой (правой) $N\alpha_{k-1}$-кривой касается нижней ветви левой (правой) $M_0\alpha_1$-кривой. Аналогично определяется верхняя ветвь $M_0\alpha_k$-кривой.

Относительно α_k-кривых можно доказать следующее:

1. $M_0\alpha_k$-кривая проходит через точку M_0; она расположена между $M_0\alpha_{k-1}$-кривой и общей к ним касательной в точке M_0. Эта касательная является предельным положением $M_0\alpha_k$-кривых при $k \to \infty$.

2. Нижняя ветвь левой (правой) $M_0\alpha_k$-кривой есть геометрическое место точек N таких, что верхняя ветвь левой (правой) $N\alpha_p$-кривой, $1 \leqslant p \leqslant k-1$, касается нижней ветви левой (правой) $M_0\alpha_{k-p}$-кривой. Аналогичное верно и для верхней ветви.

3. Все $M_0\alpha_k$-кривые имеют одно и то же направление вогнутости.

4. При $k \to \infty$ угол наклона левой (правой) $M_0\alpha_k$-кривой к оси равномерно стремится к $\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

§ 4. Обратимся к нашим краевым задачам. В случае условия (3_1) будем искать решение в виде

$$U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_{S'}[FV_z - \varphi V]\,dS + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma'} Q_z(M)\frac{\partial V}{\partial n}\,dS, \quad (10)$$

а в случае условия (3_2)—в виде

$$U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_{S'}[FV_z - \varphi V]\,dS + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sigma'}\frac{P(M)\,dS}{\sqrt{(z_0 - z)^2 - r^2}}, \quad (10_1)$$

где S' — часть области B, вырезанная из нее конусом (5). Функции (10) и (10_1) удовлетворяют волновому уравнению и начальным условиям. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, достаточно определить функции $P(M)$ и $Q(M)$ из уравнений

$$Q(M_0) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_0} Q_z(M)\frac{\partial V}{\partial n}\,dS = A(M_0), \quad (11)$$

$$P(M_0) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_0} P_z(M)\frac{\partial V}{\partial n_0}\,dS = C(M_0), \quad (11_1)$$

где $A(M_0)$ и $C(M_0)$ — известные функции. Уравнения (11) и (11_1) вполне аналогичны, и мы ограничимся рассмотрением уравнения (11).

Применим к этому уравнению обычный метод итерации. После некоторых преобразований мы придем к интегродифференциальному уравнению вида

$$Q(M_0) - \iint\limits_{\sigma_0} J(M_0, M)\,Q_{zz}(M)\,dS = E(M_0), \quad (12)$$

где ядро J обладает следующими свойствами:

1) ядро J непрерывно в треугольнике σ_0 и равно нулю на $M_0\alpha_1$-кривых;

2) производная J_z непрерывна в замкнутом треугольнике, ограниченном $M_0\alpha_2$-кривыми и осью u; внутри треугольников, ограниченных осью u и левыми, соответственно правыми, $M_0\alpha_1$- и $M_0\alpha_2$-кривыми, эта производная непрерывна, но обращается в бесконечность на $M_0\alpha_2$-кривых. На $M_0\alpha_1$-кривых $J_z = 0$;

3) в треугольника σ_0 J_z абсолютно интегрируема.

Ядро J_z можно представить в виде

$$J_z = \frac{A_1(M_0 M)}{u_0 - u}\sqrt{\left|\frac{\Phi_1(M_0, M)}{\Phi_2(M_0, M)}\right|}, \quad (13_1)$$

если M лежит между левыми $M_0\alpha_1$- и $M_0\alpha_2$-кривыми. Здесь A_1 — аналитическая функция и

$$\Phi_k(M_0, M) = z_0 - z - Z_k(u_0, u) = 0 \quad (14_1)$$

есть уравнение левой $M_0\alpha_k$-кривой. Если M лежит между правыми $M_0\alpha_1$- и $M_0\alpha_2$-кривыми, то

$$J_z = \frac{A_1'(M_0, M)}{u_0 - u}\sqrt{\left|\frac{\Psi_1(M_0, M)}{\Psi_2(M_0, M)}\right|}, \quad (13_2)$$

где A_1' — также аналитическая функция и

$$\Psi_k(M_0, M) = z_0 - z + Z_k(u_0, u) = 0 \quad (14_2)$$

есть уравнение правой $M_0\alpha_k$-кривой.

Можно доказать также, что

$$J_{z_0}=\frac{B_1(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Phi_1(M_0,\,M)}{\Phi_2(M_0,\,M)}\right|},\tag{15_1}$$

если M лежит между левыми $M_0\alpha_1$- и $M_0\alpha_2$-кривыми, и

$$J_{z_0}=\frac{B_1'(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Psi_1(M_0,\,M)}{\Psi_2(M_0,\,M)}\right|},\tag{15_2}$$

если M лежит между правыми $M_0\alpha_1$- и $M_0\alpha_2$-кривыми. B_1 и B_1' — аналитические функции. В треугольнике между осью u и $M_0\alpha_2$-кривыми J_{z_0} непрерывна.

§ 5. Пусть ядро $K_m(M_0, M)$ определено следующим образом:

$$1.\quad K_m(M_0,\,M)=\frac{A_m(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Phi_{2m-2}(M_0,M)}{\Phi_{2m}(M_0,\,M)}\right|},\tag{16_1}$$

если M лежит между левыми $M_0\alpha_{2m-2}$- и $M_0\alpha_{2m}$-кривыми;

$$2.\quad K_m(M_0,\,M)=\frac{A_m'(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Psi_{2m-2}(M_0,\,M)}{\Psi_{2m}(M_0,\,M)}\right|},\tag{16_2}$$

если M лежит между правыми $M_0\alpha_{2m-2}$- и $M_0\alpha_{2m}$-кривыми; A_m и A_m' — аналитические функции;

$$3.\quad K_m(M_0,\,M)=0\tag{16_3}$$

в остальной части треугольника σ_0*.

При $m=1$ индекс $2m-2$ следует заменить единицей. Положим

$$J(Q)=\iint\limits_{\sigma_0}Q_z(M)\,J_z(M_0,\,M)\,dS;\quad K_m(Q)=\iint\limits_{\sigma_0}Q_z(M)\,K_m(M_0,\,M)\,dS.\tag{17}$$

Можно показать, что

$$K_mJ(Q)=\iint\limits_{\sigma_0}\overline{K}_m(M_0,\,M)\,Q_z(M)\,dS.\tag{18}$$

Здесь $\overline{K}_m(M_0, M)$ непрерывно и дифференцируемо, если M лежит между левой и правой $M_0\alpha_{2m+2}$-кривыми. Далее,

$$\overline{K}_m(M_0,\,M)=\frac{C_m(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Phi_1(M_0,\,M)}{\Phi_{2m+2}(M_0,\,M)}\right|},\tag{19_1}$$

если M лежит между левыми кривыми $M_0\alpha_1$ и $M_0\alpha_{2m+2}$, и

$$\overline{K}_m(M_0,\,M)=\frac{C_m'(M_0,\,M)}{u_0-u}\sqrt{\left|\frac{\Psi_1(M_0,\,M)}{\Psi_{2m+2}(M_0,\,M)}\right|},\tag{19_2}$$

если M лежит между аналогичными правыми кривыми; C_m и C_m' — аналитические функции**.

§ 6. Из уравнения (11) можно получить, что $Q_z=0$ при $z=0$. Интеграл в (12) можно взять по частям один раз, и это приведет нас к уравнению

$$Q(M_0)+\iint\limits_{\sigma_0}Q_z(M)\,J_z(M_0,\,M)\,dS=E(M_0).\tag{20}$$

---

* Это условие несущественно и может быть заменено условием аналитичности K_m в указанной области.

** Не трудно было бы установить общий закон композиции ядер вида K_m и K_n. Нам это, однако, не понадобится.

Положим

$$\Gamma(M_0, M) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(M_0, M) \tag{21}$$

и применим к обеим частям уравнения (20) операцию

$$\omega(M_0) + \iint_{\sigma_0} \Gamma(M_0, M)\, \omega_z(M)\, dS. \tag{22}$$

Мы получим уравнение вида

$$Q(M_0) + \iint_{\sigma_0} Q_z(M)\, \Gamma'(M_0, M)\, dS = F(M_0). \tag{23}$$

Можно так подобрать $A_m(M_0, M)$ и $A'_m(M_0, M)$, чтобы функция Γ' была непрерывна, а Γ'_z — абсолютно интегрируема. Так как $\Gamma'(M_0, M) = 0$ на $M_0\alpha_1$-кривых, а $Q_z = 0$ на оси u, то, интегрируя по частям, мы получим для неизвестной $Q(M)$ интегральное уравнение типа Volterra:

$$Q(M_0) + \iint_{\sigma_0} Q(M)\, \Gamma'_z(M_0, M)\, dS - \int_h Q(M)\, \Gamma(M_0, M)\, du = F(M_0) \tag{24}$$

эквивалентное уравнению (11). Буквой h мы обозначаем ломанную, составленную из отрезков касательных к $M_0\alpha_1$-кривым до их пересечения с осью u. Решив уравнение (24), мы тем самым решим и нашу краевую задачу.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность С. Л. Соболеву, давшему мне несколько полезных указаний в процессе выполнения этой работы.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР

Поступило
5 VII 1940