Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОБ ОДНОМ КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IX 1940)

1. Пусть G — некоторая топологическая группа. Функцию $f(g)$ $(g \in G)$, принимающую, вообще говоря, комплексные значения, будем называть эрмитово-положительной (сокращенно э. п.) если $f(g)$ — эрмитова функция, т. е. $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}^*$ $(g \in G)$ и для любых $g_1 \in G,\ g_2 \in G, \ldots, g_n \in G$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эрмитова форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(g_j g_k^{-1}) \xi_j \bar{\xi}_k \tag{1}$$

неотрицательна.

Неотрицательность формы (1) при $n = 2$ означает не что иное, как то, что:

$$|f(g)| \leqslant f(e) \quad (g \in G,\ e = gg^{-1}). \tag{2}$$

Полагая в (1) $n = 3,\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = \eta,\ \xi_3 = -\eta,\ g_1 = e,\ g_2 = g,\ g_3 = h$, получим

$$f(e) + 2R\{(f(g) - f(h))\bar{\eta}\} + 2[f(e) - R\{f(gh^{-1})\}]|\eta|^2 \geqslant 0,$$

где $R\{z\}$ обозначает вещественную часть числа z. Так как в этом неравенстве η — произвольное комплексное число, то из него следует**, что

$$|f(g) - f(h)|^2 \leqslant 2f(e)[f(e) - R\{f(gh^{-1})\}] \ (g, h \in G). \tag{3}$$

Последнее неравенство интересно тем, что из него вытекает равномерная непрерывность э. п. функции $f(g)$ при непрерывности ее вещественной части в единственной точке $g = e$***.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность всех *непрерывных* э. п. функций, а через $\mathfrak{R}$ их комплексную линейную оболочку. Очевидно, некоторая функция $\varphi(g)$ $(g \in G)$ принадлежит $\mathfrak{R}$, если каждая из ее эрмитовых компонент

$$\varphi^+(g) = \frac{1}{2}\{\varphi(g) + \overline{\varphi(g^{-1})}\}, \quad \varphi^-(g) = \frac{1}{2i}\{\varphi(g) - \overline{\varphi(g^{-1})}\} \tag{4}$$

представима в виде разности двух функций из $\mathfrak{P}$.

* Чертой мы обозначаем переход к комплексно-сопряженной величине.
** Сравни с леммой 1 статьи Д. А. Райкова ([1]).
*** Это замечание является одновременно усилением и обобщением одного замечания А. П. Артеменко [см. ([2])].

Так как в силу одной алгебраической теоремы Шура ([3]) произведение двух функций из $\mathfrak{P}$ снова принадлежит $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{R}$ — кольцо.

Если эрмитова функция $\varphi(g) \in \mathfrak{R}$, то положим

$$\|\varphi\| = \inf\,[f^{(1)}(e) + f^{(2)}(e)], \tag{5}$$

причем infimum распространяется на любые пары $f^{(i)}(g) \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2)$ такие, что $\varphi = f^{(1)} - f^{(2)}$; в частности,

$$\|\varphi\| = \varphi(e) \text{ при } \varphi \in \mathfrak{P}.$$

Для произвольной функции $\varphi \in \mathfrak{R}$, положим

$$\|\varphi\| = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \|\varphi^+ \cos\alpha + \varphi^- \sin\alpha\|, \tag{6}$$

где φ^+ и φ^- — эрмитовы компоненты функции φ, определяемые из (3).

Легко видеть, что определенная таким образом норма $\|\varphi\|$ $(\varphi \in \mathfrak{R})$ обладает следующими свойствами:

1° $\|\varphi\| > 0$, если $\varphi \not\equiv 0$; 2° $\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\,\|\varphi\|$ (λ — комплексное число);

3° $\|\varphi + \psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$; 4° $\|\varphi\psi\| \leqslant \sqrt{2}\,\|\varphi\|\,\|\psi\|$ $(\varphi, \psi \in \mathfrak{R})$,

причем множитель $\sqrt{2}$ в 4° может быть опущен, если одна из функций φ или ψ эрмитова. Кроме того из (2) и (5) следует, что если $\varphi \in \mathfrak{R}$ — эрмитова функция, то

$$\sup_{g \in G} |\varphi(g)| \leqslant \|\varphi\|. \tag{7}$$

Теорема 1. *Кольцо $\mathfrak{R}$ полно по норме $\|\varphi\|$.*

Мы опускаем простое доказательство этой теоремы*.

2. Заменим заданную в G топологию на дискретную топологию. Тогда роль кольца $\mathfrak{R}$ будет играть кольцо $\mathfrak{R}'$, являющееся линейной комплексной оболочкой совокупности всех э. п. функций. Для элементов $\mathfrak{R}'$ построим норму $\|\varphi\|'$ аналогично тому, как это сделано для элементов $\mathfrak{R}$. Возникает следующая проблема: Не есть ли $\mathfrak{R}$ совокупность всех непрерывных функций из $\mathfrak{R}'$ и, если $\varphi \in \mathfrak{R}$, то не имеет ли место равенство $\|\varphi\|' = \|\varphi\|$. Эта проблема имеет положительное решение тогда и только тогда, когда имеет место.

Теорема 2. *Если некоторая эрмитова непрерывная функция $\varphi(g)$ $(g \in G)$ допускает представление*

$$\varphi(g) = F^{(1)}(g) - F^{(2)}(g) \quad (g \in G), \tag{8}$$

где $F^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — э. п. функции, то она допускает представление

$$\varphi(g) = f^{(1)}(g) - f^{(2)}(g) \quad (g \in G), \tag{9}$$

где $f^{(i)} \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2)$ и $f^{(1)}(e) + f^{(2)}(e) \leqslant F^{(1)}(e) + F^{(2)}(e)$.

В последующем мы доказываем эту теорему для двух случаев, когда: 1) G — компактная, 2) G — произвольная коммутативная группа, В этих двух случаях из нашего доказательства теоремы 2 следует также, что функции $f^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ могут быть так выбраны, что

$$\|\varphi\| = f^{(1)}(e) + f^{(2)}(e).$$

3. Доказательство теоремы 2 для любой компактной группы.

---

* Не трудно также доказать, что если $\varphi(g) \in \mathfrak{R}$, то и $\varphi(agb) \in \mathfrak{R}$ при любых $a, b \in G$.

В этом случае удобно пользоваться теорией Peter'a—Weyl'я [см. Л. С. Понтрягин ([4]), гл. IV]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(g)=\lambda\int_G \varphi(gh^{-1})\,\psi(h)\,dh \qquad \left(\int_G dg=1\right). \tag{10}$$

Пусть

$$\varphi(gh^{-1})\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(g)\,\overline{\psi_k(h)}}{\lambda_k} \tag{11}$$

— формальное разложение ядра $\varphi(gh^{-1})$ в билинейный ряд по фундаментальным функциям ψ_k $(k=1, 2, \ldots)$ интегрального уравнения (10). Для доказательства теоремы достаточно доказать, что из (8) вытекает:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|}\leqslant F^{(1)}(e)+F^{(2)}(e). \tag{12}$$

Действительно, из конечности величины S не трудно заключить, пользуясь известными свойствами разложения (11), что оно сходится абсолютно и равномерно. Тогда, полагая

$$f^{(1)}(gh^{-1})=\sum_{\lambda_k>0}\frac{\psi_k(g)\,\overline{\psi_k(h)}}{\lambda_k}, \quad f^{(2)}(gh^{-1})=-\sum_{\lambda_k<0}\frac{\psi_k(g)\,\overline{\psi_k(h)}}{\lambda_k},$$

будем иметь $f^{(i)}(g)\in\mathfrak{P}$ $(i=1, 2)$, $\varphi(g)=f^{(1)}(g)-f^{(2)}(g)$ и, кроме того,

$$f^{(1)}(e)+f^{(2)}(e)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|}. \tag{13}$$

Покажем, что из разложения (8) действительно вытекает (12). Пусть g_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ пока некоторые произвольные элементы из G. Обозначим через $\rho_1^{(i)}\geqslant\rho_2^{(i)}\geqslant\ldots\geqslant\rho_n^{(i)}$ $(\geqslant 0)$ $(i=1, 2)$ собственные числа матрицы $\left\|\frac{1}{n}F^{(i)}(g_jg_k^{-1})\right\|$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$, т. е. корни уравнения $\left|\frac{1}{n}F^{(i)}(g_jg_k^{-1})-\rho\delta_{jk}\right|_1^n=0$. Пусть, с другой стороны, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\ldots\geqslant\sigma_p\geqslant 0$ все неотрицательные, а $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_q<0$ $(p+q=n)$ все отрицательные собственные числа матрицы $\left\|\frac{1}{n}\varphi(g_jg_k^{-1})\right\|$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$. Так как в силу (11)

$$-\sum_{j,k=1}^{n}F^{(2)}(g_jg_k^{-1})\,\xi_j\overline{\xi}_k\leqslant\sum_{j,k=1}^{n}\varphi(g_jg_k^{-1})\,\xi_j\overline{\xi}_k\leqslant\sum_{j,k=1}^{n}F^{(1)}(g_jg_k^{-1})\,\xi_j\overline{\xi}_k,$$

то из минимаксимальных свойств ([5]) собственных чисел вытекает, что

$$\sigma_k\leqslant\rho_k^{(1)} \quad (k=1, 2, \ldots, p), \quad -\tau_k\leqslant\rho_k^{(2)} \quad (k=1, 2, \ldots, q).$$

Откуда

$$s_n=\sum_{k=1}^{p}\sigma_k+\sum_{k=1}^{q}|\tau_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(1)}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(2)}=F^{(1)}(e)+F^{(2)}(e). \tag{14}$$

Но при соответствующем выборе g_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ и неограниченном возрастании n можно добиться того, чтобы детерминант

$$\Delta_n(\lambda)=\left|\delta_{jk}-\frac{\lambda}{n}\varphi(g_jg_k^{-1})\right|_1^n$$

сходился равномерно в каждой конечной части плоскости комплексного переменного к детерминанту Фредгольма $D(\lambda)$ интегрального уравнения (10). Но тогда s_n, являющееся суммой абсолютных величин характеристических чисел $\Delta_n(\lambda)$, сходится к S. Отсюда в силу (17) находим (12). Теорема доказана*.

Заметим еще, что одновременно с теоремой мы доказали, что для любой эрмитовой функции $\varphi \in \mathfrak{R}$ норма $\|\varphi\|$ может быть вычислена по формуле [что следует из сопоставления (12) и (13)]:

$$\|\varphi\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}.$$

4. Пусть теперь G — произвольная коммутативная группа. В этом случае нам придется предварительно ввести ряд понятий и замечаний.

Обозначим через X какую-либо достаточно полную** группу характеров $\chi(g)$ [$|\chi(g)|^2 = \chi(g)\,\overline{\chi(g^{-1})} = 1$, $\chi(gh) = \chi(g)\,\chi(h)$, $g, h \in G$] абстрактной группы G. Каждому $g \in G$ отвечает функция на X: $g(\chi) = \chi(g)$ ($\chi \in$ X). Для функций $P(\chi)$, определенных на X, введем норму

$$\|P\| = \sup_{\chi \in X} |P(\chi)|. \tag{15}$$

Обозначим через B замыкание по норме $\|P\|$ линейной комплексной оболочки всевозможных функций $g(\chi)$ на X. Очевидно, B — кольцо, а, следовательно, если $P(g) \in B$, то и любой полином от $P(g)$ входит в B, а, значит, и $|P(g)| \in B$. Линейный (т. е. аддитивный и непрерывный), функционал $\Phi(P)$ $(P \in B)$ называется в е щ е с т в е н н ы м, если он принимает вещественные значения на вещественных функциях $P(\chi) \in B$; если, кроме того, $\Phi(P) \geqslant 0$ при $P(\chi) \geqslant 0$ $(\chi \in X)$, то функционал $\Phi(P)$ называется п о л о ж и т е л ь н ы м. Легко видеть, что норма вещественного функционала Φ не меняется, если его рассматривать не на B, а на совокупности B' всех вещественных функций из B'. Заметим также, что если $\Psi(P)$ $(P \in B)$ — некоторый линейный положительный функционал, то

$$\|\Psi\| = \sup_{\|P\|=1} |\Psi(P)| = \Psi(1)$$

и имеет место неравенство Шварца

$$|\Psi(PQ)|^2 \leqslant \Psi(|P|^2)\,\Psi(|Q|^2) \quad (P, Q \in B). \tag{16}$$

Из (15) следует [см. С. Банах ([8]), стр. 217—218], что любой вещественный функционал Φ допускает разложение

$$\Phi(P) = \Phi_+(P) - \Phi_-(P) \quad (P \in B), \tag{17}$$

где Φ_+ и Φ_- — положительные функционалы такие, что

$$\|\Phi\| = \|\Phi_+\| + \|\Phi_-\|.$$

Исходя из того, что если $P \in B$, то и $|P| \in B$, можно показать [см. F. Riesz ([6])], что для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение единицы:

$$1 = u_1(\chi) + u_2(\chi), \quad u_i(\chi) \geqslant 0\,(\chi \in X), \quad u_i \in B', \quad (i = 1, 2), \tag{18}$$

такое, что

$$0 < \Phi_+(u_2) < \varepsilon, \quad 0 < \Phi_-(u_1) < \varepsilon. \tag{19}$$

---

* Тем же методом можно доказать, что если непрерывное эрмитово ядро $K(s, t)$ $(a \leqslant s,\ t \leqslant b)$ представимо в виде разности двух ограниченных эрмитово-положительных ядер, то сумма модулей обратных величин характеристических чисел ядра $K(s, t)$ сходится.

** Т. е. такую, что для любого $g \neq e$ найдется $\chi \in$ X, при котором $\chi(g) \neq \chi(e)$.

Покажем, что при таком выборе функций $u_1(\chi)$ и $u_2(\chi)$ имеет место неравенство

$$\|\Phi_+(P)-\Phi(u_1P)\| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon\|\Phi\|}\cdot\|P\|. \tag{20}$$

Действительно, в силу неравенства Шварца и того, что $u_1^2(\chi) \leqslant u_1(\chi)$ $(\chi \in X)$, а также (19) имеем:

$$|\Phi_+(P)-\Phi_+(u_1P)|^2 = |\Phi_+(u_2P)|^2 \leqslant \Phi_+(u_2^2)\cdot\Phi_+(|P|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_+(u_2)\cdot\|\Phi_+\|\cdot\|P\|^2 < \varepsilon\|\Phi\|\cdot\|P\|^2. \tag{21}$$

С другой стороны, аналогично находим

$$|\Phi_+(u_1P)-\Phi(u_1P)|^2 = |\Phi_-(u_1P)|^2 < \varepsilon\|\Phi\|\cdot\|P\|^2. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22) получим (20).

5. Доказательство теоремы 2 для любой коммутативной группы.

Как показал недавно Д. А. Райков([7]), для того чтобы некоторая функция $F(g)$ $(g \in G$, G — коммутативная группа) была эрмитово-положительной, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный положительный функционал $\Psi(P)$ $(P \in B)$ *такой, что*

$$F(g) = \Psi(g(\chi)) \quad (g \in G).$$

Поэтому эрмитова функция $\varphi(g)$ $(g \in G)$ допускает разложение (11) тогда и только тогда, когда существует линейный вещественный функционал $\Phi(P)$ $(P \in B)$ такой, что

$$\varphi(g) = \Phi(g(\chi)) \quad (g \in G),$$

при этом каждому разложению (8) функции φ соответствует разложение Φ на разность линейных положительных функционалов Φ' и Φ'' и обратно.

Рассмотрим разложение (17) функционала Φ и положим

$$f^{(1)}(g) = \Phi_+(g(\chi)), \quad f^{(2)}(g) = \Phi_-(g(\chi)). \tag{23}$$

Так как всегда $F^{(1)}(e)+F^{(2)}(e) = \|\Phi'\|+\|\Phi''\| \geqslant \|\Phi\|$, то величина

$$f^{(1)}(e)+f^{(2)}(e) = \|\Phi_+\|+\|\Phi_-\| = \|\Phi\|$$

дает норму $\|\varphi\|$. Для доказательства теоремы 2 остается показать, что если функция $\varphi(g)$ непрерывна, то и функции $f^{(i)}(g)$ $(i=1, 2)$ таковы. Выберем для этого произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем для него функции $u_i(\chi)$ $(i=1, 2)$ так, чтобы выполнялись условия (18) и (19). Очевидно также, что мы можем выбрать $u_1(\chi)$ в виде некоторого «полинома»:

$$u_1(\chi) = \sum_1^n c_k g_k(\chi).$$

Положим

$$f_\varepsilon(g) = \Phi[u_1(\chi)\, g(\chi)] = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(g_k g) \quad (g \in G). \tag{24}$$

Очевидно, $f_\varepsilon(g)$ $(g \in G)$ — непрерывная функция. С другой стороны, из (23) и (24) следует, что

$$|f^{(1)}(g)-f_\varepsilon(g)| < 2\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\|\varphi\|}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то мы заключаем, что $f^{(1)}(g)$, а, значит, и $f^{(2)}(g)$ — непрерывные функции. Теорема 2 доказана.

Заметим еще, что в силу известных принципов теории линейных функционалов [см. С. Банах ([8]), стр. 57] из цитированного результата Д. А. Райкова и теоремы 2 вытекает следующая характеристика кольца $\mathfrak{R}$.

Теорема 3*. *Для того чтобы некоторая функция* $\varphi(g)$ $(g \in G)$ *принадлежала кольцу* $\mathfrak{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1° $\varphi(g)$ — *непрерывная функция.*

2° *Существует константа* M *такая, что для любых* $g_1 \in G, \ldots, g_n \in G$ *и комплексных чисел* $c_1, \ldots, c_n$ *выполняется неравенство*

$$|c_1\varphi(g_1) + \ldots + c_n\varphi(g_n)| \leqslant M \sup_{\chi \in X} |c_1 g_1(\chi) + \ldots + c_n g_n(\chi)|. \quad (25)$$

6. Пусть теперь G — локально-компактная коммутативная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, а X — топологическая группа [см. Л. Понтрягин ([4]), гл. V] всех непрерывных характеров группы G. В этом случае имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы некоторая функция* $\varphi(g)$ $(g \in G)$ *допускала представление:*

$$\varphi(g) = \int_X g(\chi)\, d\mu(\chi), \quad (26)$$

где $\mu(E)$ — *некоторая комплексно-значная абсолютно аддитивная функция от измеримых по Борелю множеств* $E \subset X$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\varphi(g)$ *удовлетворяла условиям 1° и 2° теоремы 3.*

Необходимость условий не трудно проверить непосредственно, исходя из (26). При доказательстве достаточности мы в силу теоремы 3 можем ограничиться только лишь тем случаем, когда $\varphi \in \mathfrak{P}$. Но в этом случае возможность представления (26) была недавно доказана А. Повзнером ([9]) и Д. Райковым ([10])**.

Теорема 3 является обобщением теоремы Bochner'a ([11]), утверждающей то же, что и теорема 4, для того частного случая, когда G — действительная ось.

Одесский государственный университет

Поступило
9 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Райков, ДАН, XXVI, № 9 (1940). [2] М. Крейн, ДАН, XXV, № 9 (1939). [3] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. II, отд. VII, стр. 113. [4] Л. Понтрягин, Непрерывные группы (1938). [5] Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, стр. 30 (1932). [6] F. Riesz, Atti del congresso internazionale dei Matematici Bologna, III, p. 143—148 (1928) (VI), или Annals of Mathematics, 41, № 1 (1940). [7] Д. Райков, ДАН, т. XXVII, № 4 (1940). [8] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [9] А. Повзнер, ДАН, т. XXVIII, № 4 (1940). [10] Д. Райков, ДАН, т. XXVIII, № 4 (1940). [11] S. Bochner, Bull. Amer. Math. Soc., v. XL, p. 271—76 (1934).

* Если отбросить в теореме 3 условие 1°, то мы получим характеристику кольца $\mathfrak{R}'$; при этом наименьшее значение константы M в (25) дает $\|\varphi\|'$, если φ—эрмитова функция. Отсюда не трудно заключить, что фигурирующий в (25) supremum не зависит от выбора группы X, что также может быть получено из многих других соображений.

** С работой Д. А. Райкова автор познакомился после того, как составил свою заметку; эта работа позволяет высказать теорему 4 при несколько более общих предположениях.