Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. ГУТЕНМАХЕР

ИСКУССТВЕННЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Г. Бруевичем 16 XII 1944)

Развитые нами методы электрического моделирования физических явлений в пространстве и времени ([1–4]) мы основывали на математическом аппарате разностных уравнений (методе Рунге). Однако нами подчеркивалось, что, в отличие от последних, в наших уравнениях производные по времени t не заменяются разделенными разностями.

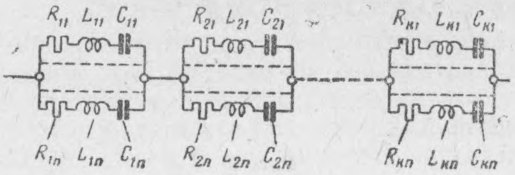

Рис. 1

При дальнейшем изучении процессов в наших многомерных искусственных моделях оказалось, что аппарат интегральных уравнений лучше приспособлен для описания явлений в моделях. К тому же при этом вскрываются многие важные их свойства, имеющие значение для теории и практики моделирования.

Для составления моделей нами используются двухполюсники (рис. 1), которые могут состоять из произвольных сочетаний сосредоточенных элементов электрической цепи — сопротивлений R, индуктивностей L и емкостей C. Переходная проводимость A или B такого двухполюсника (рис. 1) определяется выражением

$$A,\ B = 1 : \sum_{i=1}^{n} \left[1 : \sum_{m=1}^{k_i} \frac{1}{R_{im} + L_{im}\, p + \dfrac{1}{c_{im}\, p}} \right]. \qquad (1)$$

Здесь p — оператор $\partial/\partial t$.

На рис. 2 представлена часть четырехмерной электрической схемы, размещенной на плоскости (см. ([1–4])). Опишем свойства модели при помощи функции сопротивления связи Z. Для этого оставим в модели только проводимости связи A и выберем среди узловых точек модели или вне модели точку нулевого потенциала O. Приложим к одной из узловых точек с координатами $\{s_{ij_l}\} = (s_{1j_1},\ s_{2j_2}, \ldots s_{nj_n})$ исток, т. е. источник тока $I\{s_{ij_l}\}$. При этом через элементы A модели потечет ток к точке O, и на узловых точках модели

$\{x_{kik}\} = (x_{1i_1}\ x_{1i_2}, \ldots, x_{ni_n})$ появятся напряжения $u(x_{kik})$. Отношение этих напряжений к величине силы тока $I\{s_{ij_l}\}$ имеет размерность сопротивления

$$\frac{u\{x_{kik}\}}{I\{s_{ij_l}\}} = Z\{x_{kik};\ s_{ij_l}\}, \tag{2}$$

откуда получаем закон, аналогичный закону Ома:

$$u\{x_{kik}\} = Z\{x_{kik};\ s_{ij_l}\} I\{s_{ij_l}\} \quad (k,\ l = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция $Z\{x_{kik};\ s_{ij_l}\}$ учитывает и внешние (граничные) сопротивления, связывающие граничные узловые точки модели с выбранной нулевой точкой O.

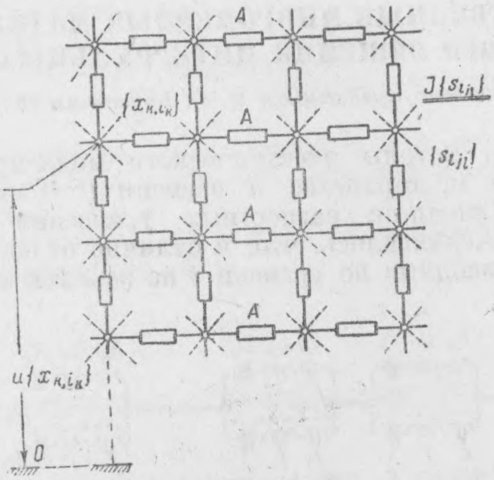

Рис. 2

При одновременном действии истоков и стоков во всех или части узловых точек схемы напряжения во всех точках схемы могут быть определены на основе принципа суперпозиции или принципа наложения, справедливого для линейных систем

$$u\{x_{kik}\} = \sum_{j_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{j_1=1}^{m_1} Z\{x_{kik};\ s_{ij_l}\} I\{s_{ij_l}\} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Природа истоков и стоков. Токи I, притекающие или вытекающие из узловых точек схемы к нулевой точке системы, могут существовать только при наличии специальных проводимостей B, связывающих непосредственно узловые точки с нулевой точкой. В общем случае каждая такая проводимость может состоять из R, L и C, соединенных по схеме рис. 1, причем в некоторые ветви может быть включен источник тока E.

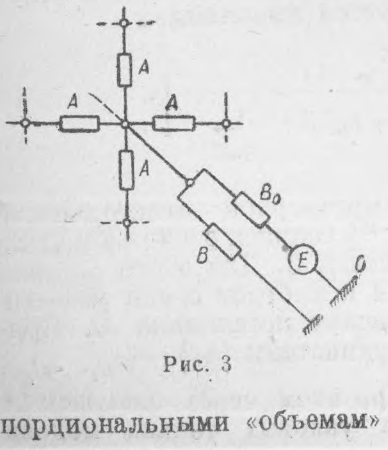

Рис. 3

Пусть к каждой узловой точке присоединена одна проводимость B без источников и параллельно ей весьма малая проводимость B_0 с источником E [4] (см. на рис. 3 схему соединения для одной из произвольных узловых точек). Выберем значения проводимостей пропорциональными «объемам» элементарных параллелепипедов

$$\overline{B}=B\Delta s_1\Delta s_2\ldots\Delta s_n \quad \overline{B}_0=B_0\,\Delta s_1\Delta s_2\ldots\Delta s_n\,. \tag{4}$$

Проводимости B определяют зависимость между напряжениями в узловых точках $u\{s_{ij_l}\}$ и токами $I\{s_{ij_l}\}$. По закону Ома

$$I\{s_{ij_l}\}=\overline{B}\{s_{ij_l}\}\,u\{s_{ij_l}\}+\overline{B}_0\{s_{ij_l}\}\,[E\{s_{ij_l}\}-u\{s_{ij_l}\}]. \tag{5}$$

Подставляя значения стоков и истоков в уравнение (3), получим:

$$u\{x_{hi_k}\}=F\{x_{hi_k}\}+$$
$$+\sum_{j_n=1}^{m_n}\ldots\sum_{j_1=1}^{m_1}Z\{x_{hi_k};\,s_{ij_l}\}\,[B-B_0]\{s_{ij_l}\}\,u\{s_{y_l}\}\ \Delta s_1\Delta s_2\ldots\Delta s_n, \tag{6}$$

где

$$F\{x_{hi_k}\}=\sum_{j_n=1}^{m_n}\ldots\sum_{1=1}^{m_1}Z\{x_{h_{ik}};\ s_{ij_l}\}\,B_0\{s_{ij_l}\}\,E\{s_{ij_l}\}\,\Delta s_1\,\Delta s_2\ldots\Delta s_n\,.$$

При бесконечном увеличении числа элементов A и B схемы, т. е. при предельном переходе $\Delta s_k\to 0$, получим линейное интегральное уравнение 2-го рода

$$u\{x_k\}=F\{x_k\}+\int_{(G)}\ldots\int Z\{x_k;\,s_k\}\,\underline{B}\{s_k\}\,u\{s_k\}\,ds_1\,ds_2\ldots ds_n. \tag{7}$$

Здесь $\underline{B}=B-B_0$, а интеграция распространяется на область G, точки которой определяются координатами s_k ($k=1,\,2,\ldots,\,n$).

При этой замене мы используем основную идею метода Фредгольма, которая состоит в том, что интегральное уравнение типа (7) рассматривается как предельное для системы линейных уравнений (6), когда число узловых точек неограниченно возрастает.

Позже мы рассмотрим ряд важнейших режимов работы электрических моделей в зависимости от структуры параметров двухполюсников A и B и свойств источников E.

Поступило
16 XII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Гутенмахер, ДАН, XXVII, 3, 198 (1940). [2] Л. И. Гутенмахер, Электричество, № 5 (1940). [3] Л. И. Гутенмахер, ЖТФ, XII, 2—3, 47 (1942). [4] Л. И. Гутенмахер, Электрическое моделирование, изд. АН СССР, 1943.