Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ю. Н. РАБОТНОВ

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

*(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 31 V 1944)*

§ 1. Напряжения и деформации бесконечно тонкого слоя. Рассмотрим бесконечно тонкий слой, отнесенный к криволинейным координатам $u$, $v$. После деформации коэффициенты $g_{ij}$ получат приращения $2\varepsilon_{ij}$, и относительное удлинение элемента будет:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{11}du^2 + 2\varepsilon_{12}du\,dv + \varepsilon_{22}dv^2}{ds^2}. \tag{1.1}$$

Сумма главных удлинений:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \vartheta = \frac{g_{11}\varepsilon_{22} + g_{22}\varepsilon_{11} - 2g_{12}\varepsilon_{12}}{g}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \tag{1.2}$$

Рассматривая равновесие бесконечно малого треугольника и раскладывая напряжения, действующие на стороны его, образованные координатными линиями, по направлениям касательных к этим линиям, найдем, что нормальное напряжение на элементе $ds$:

$$\sigma = \frac{s_{11}du^2 + 2s_{12}du\,dv + s_{22}dv^2}{ds^2}. \tag{1.3}$$

Здесь $s_{11} = \sigma_{22}\sqrt{g_{11}g/g_{22}}$, $s_{12} = \sigma_{12}\sqrt{g}$, $s_{22} = \sigma_{11}\sqrt{g_{22}g/g_{11}}$.

Вектор напряжения, действующего на элемент $ds$:

$$\bar{\sigma}\,ds = \bar{s}_1 du + \bar{s}_2 dv. \tag{1.4}$$

Здесь $\bar{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(s_{11}\bar{\rho}_2 - s_{12}\bar{\rho}_1)$, $\bar{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(s_{12}\bar{\rho}_2 - s_{22}\bar{\rho}_1)$. (1.5)

Уравнения связи между напряжениями и деформациями:

$$s_{ij} = \frac{E}{1-\mu^2}[\vartheta g_{ij} - (1-\mu)\varepsilon_{ij}]. \tag{1.6}$$

§ 2. Напряженное и деформированное состояние оболочки. Оболочку конечной толщины $2h$, срединная поверхность которой определена радиусом-вектором $\bar{\rho}$, заданным как функция параметров $u$, $v$, можно мыслить состоящей из бесконечно тонких слоев, параллельных срединной поверхности. Напряженное и деформированное состояние слоя описывается формулами § 1.

Радиус-вектор точки слоя, находящегося на расстоянии $z$ от срединной поверхности:

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho} + \bar{\nu}z. \tag{2.1}$$

Здесь $\bar{\nu}$ — единичный вектор нормали срединной поверхности. Соотношение (2.1) позволяет вычислить $g'_{ij}$ для слоя. Имеем:

$$g'_{ij} = g_{ij} - 2b_{ij}z. \tag{2.2}$$

$b_{ij} = -\overline{\rho_i}\,\overline{\nu_j}$ — коэффициенты второй квадратичной формы для срединного слоя. В результате деформации $b_{ij}$ изменяется на величину $\delta_{ij}$, и компоненты деформации для слоя при сохранении гипотезы Кирхгофа определяются следующим образом:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} z. \tag{2.3}$$

Шесть величин $\varepsilon_{ij}$, $\delta_{ij}$ полностью определяют деформированное состояние оболочки. Напряженное состояние находится по формулам (1.6). Пренебрегая $z^2$, получим:

$$s'_{ij} = s_{ij} - z p_{ij},$$

$s_{ij}$ определяются из (1.6), для $p_{ij}$ будем иметь:

$$p_{ij} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\delta g_{ij} - (1-\mu)\,\delta_{ij}\right], \quad \delta = \frac{1}{g}\left(g_{12}\delta_{22} + g_{22}\delta_{11} - 2g_{12}\delta_{12}\right). \tag{2.4}$$

Желая характеризовать напряженное состояние в оболочке, так же как и деформации, ковариантными параметрами, мы примем за меру внутренних сил шесть величин:

$$T_{ij} = \int_{-h}^{+h} s'_{ij}\, dz = 2hs_{ij}, \quad L_{ij} = \int_{-h}^{+h} z s'_{ij} dz = \frac{2h^3}{3} p_{ij}. \tag{2.5}$$

Выражения:

$$T = \frac{T_{11}du^2 + 2T_{12}dudv + T_{22}dv^2}{ds^2} \text{ и } L = \frac{L_{11}du^2 + 2L_{12}dudv + L_{22}dv^2}{ds^2}$$

отличаются от нормального усилия и изгибающего момента на величину порядка $h/R$, если напряжения изгиба и растяжения — сжатия одного порядка. Для $T_{ij}$, $L_{ij}$ получаем следующие формулы:

$$T_{ij} = C\left[g_{ij}\vartheta - (1-\mu)\,\varepsilon_{ij}\right], \quad L_{ij} = -B\left[g_{ij}\delta - (1-\mu)\,\delta_{ij}\right]. \tag{2.6}$$

§ 3. Уравнения равновесия. Если $R_1$ — перерезывающая сила на единицу длины линии $u$, $R_2$ — перерезывающая сила на единицу длины линии $v$, из условий равновесия бесконечно малого треугольника получим:

$$Rds = R_1\sqrt{g_{11}}\,du + R_2\sqrt{g_{22}}\,dv = N_1 du + N_2 dv, \quad R_i\sqrt{g_{ii}} = N_i. \tag{3.1}$$

На единицу площади срединной поверхности действует сила:

$$\overline{q} = q_1\overline{\rho}_1 + q_2\overline{\rho}_2 + q_n\overline{\nu}.$$

Введем в дополнение к принятым в § 1 обозначениям новые:

$$\sqrt{g}\,\overline{T}_i = T_{i1}\overline{\rho}_2 - T_{i2}\overline{\rho}_1, \quad \sqrt{g}\,\overline{L}_i = L_{i1}\overline{\rho}_2 - L_{i2}\overline{\rho}_1.$$

$$\sqrt{g}\,\overline{\tau}_i = T_{i1}\overline{\nu}_2 - T_{i2}\overline{\nu}_1, \quad \sqrt{g}\,\overline{\lambda}_i = L_{i1}\overline{\nu}_2 - L_{i2}\overline{\nu}_1.$$

Рассмотрим равновесие части оболочки, вырезанной поверхностью, образованной нормалями к некоторому контуру Г на срединной поверхности, ограничивающему площадь $F$. Приравнивая нулю главный вектор системы действующих сил, получим:

$$\int_{-h}^{+h} dz \int_{\Gamma} \left(\overline{s}_1' du + \overline{s}_2' dv\right) + \int_{\Gamma} \overline{\nu}\left(N_1 du + N_2 dv\right) + \iint_F \overline{q} g\, du dv = 0. \tag{3.2}$$

Первый член подъинтегрального выражения

$$\frac{s_{11}'\bar{\rho}_2'}{\sqrt{g'}} = (s_{11} - zp_{11})\,(\bar{\rho}_2 + z\bar{\nu}_2)\,(1 - zH)\,\frac{1}{\sqrt{g}} =$$

$$= \frac{s_{11}\bar{\rho}_2}{\sqrt{g}} - \frac{z^2}{\sqrt{g}}\,(p_{11}\bar{\nu}_2 + s_{11}\bar{\nu}_2 H - p_{11}\bar{\rho}_2 H) + \ldots$$

(члены с нечетными степенями $z$ не выписаны, $H$ — средняя кривизна). Поступая аналогично с остальными членами подъинтегрального выражения и преобразуя контурные интегралы в поверхностные, получим:

$$\left(\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial u}\right) - \frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial v}(H\bar{\tau}_1) - \frac{\partial}{\partial u}(H\bar{\tau}_2)\right] -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial v}(H\bar{L}_1) - \frac{\partial}{\partial u}(H\bar{L}_2)\right] + \bar{\nu}\left(\frac{\partial N_1}{\partial v} - \frac{\partial N_2}{\partial u}\right) + (N_1\bar{\nu}_2 - N_2\bar{\nu}_1) + \bar{q}g = 0. \quad (3.3)$$

Составим условие равенства нулю главного момента:

$$\int\limits_{-h}^{+h} dz \int\limits_{\Gamma} (\bar{s}_1' \times \bar{\rho}'\,du + \bar{s}_2' \times \bar{\rho}'\,dv) + \int\limits_{\Gamma} (N_1 du + N_2 dv)\,\bar{\nu} \times \bar{\rho} +$$

$$+ \iint\limits_{F} \bar{q} \times \bar{\rho} g\,du\,dv. \quad (3.4)$$

Чтобы преобразовать первый интеграл, рассмотрим первый член подъинтегрального выражения:

$$\frac{s_{11}'\bar{\rho}_2' \times \bar{\rho}}{\sqrt{g'}} = (s_{11} - zp_{11})\,(1 - zH)\,(\bar{\rho}_2 + z\bar{\nu}_2) \times (\bar{\rho} + z\bar{\nu})\,\frac{1}{\sqrt{g}} =$$

$$= \frac{s_{11}\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho}}{\sqrt{g}} - \frac{z^2}{\sqrt{g}}\,(p_{11}\bar{\nu}_2 \times \bar{\rho} - s_{11}H\bar{\nu}_2 \times \bar{\rho} - p_{11}H\bar{\rho}_2 \times \bar{\rho} +$$

$$+ p_{11}\bar{\rho}_2 \times \bar{\nu} + s_{11}H\bar{\rho}_2 \times \bar{\nu} - s_{11}\bar{\nu}_2 \times \bar{\nu}) + \ldots$$

Вычисляя аналогично второй и следующие члены, интегрируя по $z$, получим:

$$\int\limits_{-h}^{+h} \bar{s}_1' \times \bar{\rho}'\,dz = (\bar{T}_1 + \bar{\lambda}_1 - \frac{h^2}{3}H\bar{\tau}_1 - H\bar{L}_1) \times \bar{\rho} + (\bar{L}_1 - \frac{h^2}{3}H\bar{T}_1 + \frac{h^2}{3}\bar{\tau}_1) \times \bar{\nu}.$$

Преобразуя контурные интегралы уравнения (3.4) в поверхностные, найдем:

$$\left\{\left(\frac{\partial \bar{L}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{L}_2}{\partial u}\right) - \frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial}{\partial v}(H\bar{T}_1) - \frac{\partial}{\partial u}(H\bar{T}_2)\right) + \frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial v} - \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial u}\right) -\right.$$

$$\left. - (N_1\bar{\rho}_2 - N_2\bar{\rho}_1)\right\} \times \bar{\nu} = 0. \quad (3.5)$$

При упрощении использовано уравнение (3.3), а также тождества:

$$\bar{T}_1 \times \bar{\rho}_2 - \bar{T}_2 \times \bar{\rho}_1 = 0, \quad \bar{\tau}_1 \times \bar{\nu}_2 - \bar{\tau}_2 \times \bar{\nu}_1 = 0,$$

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\rho}_2 - \bar{\tau}_2 \times \bar{\rho}_1 = -(\bar{T}_1 \times \bar{\nu}_2 - \bar{T}_2 \times \bar{\nu}_1)$$

и аналогичные для $\bar{L}_i$ и $\bar{\lambda}_i$.

Считая напряжения от изгиба и растяжения срединной поверхности величинами одного порядка и пренебрегая величиной $h/R$ по сравнению с единицей, мы убеждаемся в том, что уравнения (3. 3) и (3.5) могут быть упрощены, а именно:

$$\left(\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial v}-\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial u}\right)+\bar{\nu}\left(\frac{\partial N_1}{\partial v}-\frac{\partial N_2}{\partial u}\right)+(N_1\bar{\nu}_2-N_2\bar{\nu}_1)+\bar{q}g=0, \qquad (3.3')$$

$$\left\{\left(\frac{\partial \bar{L}_1}{\partial v}-\frac{\partial \bar{L}_2}{\partial u}\right)-(N_1\bar{\rho}_2+N_2\bar{\rho}_1)\right\}\times\bar{\nu}=0.$$

В скалярной форме:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial v}-\frac{\partial T_{12}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}T_{11}+\left(\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)T_{12}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}T_{22}-$$

$$-\frac{g_{12}b_{12}-g_{11}b_{22}}{g}N_1+\frac{g_{12}b_{12}-g_{11}b_{12}}{g}N_2+q_1g=0,$$

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial u}-\frac{\partial T_{12}}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}T_{11}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)T_{12}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}T_{22}+$$

$$+\frac{g_{12}b_{22}-g_{22}b_{12}}{g}N_1-\frac{g_{12}b_{12}-g_{22}b_{11}}{g}N_2+q_2g=0,$$

$$T_{11}b_{22}+T_{22}b_{11}-2T_{12}b_{12}+g\left(\frac{\partial N_1}{\partial v}-\frac{\partial N_2}{\partial u}+q_n\right)=0,$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial v}-\frac{\partial L_{22}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}L_{11}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)L_{12}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}L_{22}-N_1g=0,$$

$$\frac{\partial L_{22}}{\partial u}-\frac{\partial L_{12}}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}L_{11}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)L_{12}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}L_{22}+N_2g=0.$$

§ 4. Уравнения совместности. Компоненты деформации и изменения кривизны связаны соотношениями, вытекающими из формул Кодацци и Гаусса. В результате деформации срединной поверхности меняются значения скобок Кристоффеля, именно:

$$\begin{Bmatrix}ij\\k\end{Bmatrix}'=\begin{Bmatrix}ij\\k\end{Bmatrix}+\gamma_{ij,\,k}-2\begin{Bmatrix}ij\\k\end{Bmatrix}\vartheta.$$

Величины $\gamma_{ij,\,k}$ вычисляются непосредственно. Так, например:

$$\gamma_{11,\,2}=\frac{1}{g}\left[-g_{12}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial u}+2g_{11}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial v}-g_{11}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial v}-\varepsilon_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u}+2\varepsilon_{11}\frac{\partial g_{12}}{\partial u}-\varepsilon_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right],$$

$$\gamma_{12,\,2}=\frac{1}{g}\left[g_{11}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial u}-g_{12}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial v}+\varepsilon_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}-\varepsilon_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right]. \qquad (4.1)$$

Если деформации крайнего волокна от растяжения — сжатия и изгиба суть величины одного порядка, членами с $\gamma_{ij,\,k}$ можно пренебречь. Получим:

$$\frac{\partial\delta_{11}}{\partial v}-\frac{\partial\delta_{12}}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\delta_{11}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\delta_{12}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\delta_{22}=0,$$

$$\frac{\partial\delta_{22}}{\partial u}-\frac{\partial\delta_{12}}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\delta_{11}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\delta_{12}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\delta_{22}=0. \qquad (4.2)$$

Третье уравнение можно записать в различных формах, отправляясь от разных форм соотношения Гаусса. Одна из этих форм:

$$b_{11}\delta_{22}+b_{22}\delta_{11}-2b_{12}\delta_{12}=\sqrt{g}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\gamma_{11,\,2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\gamma_{12,\,2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial v}\left(\vartheta+2\frac{\varepsilon_{11}}{g_{11}}\right)-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\left(\vartheta+2\frac{\varepsilon_{11}}{g_{11}}\right)\right]-2(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\frac{\varepsilon_{11}}{g_{11}}. \qquad (4.3)$$

Поступило
31 V 1944