Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

ОБ АНАМОРФОЗЕ СИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1944)

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=0}^{m_3} t_3^k \sum_{j=0}^{m_2} t_2^j \sum_{i=0}^{m_1} a_{jk}^{(i)} t_1^i = 0, \tag{1}$$

симметричное относительно t_2 и t_3, т. е. полином которого

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv lF(t_1, t_3, t_2), \tag{2}$$

где l — некоторая постоянная. Двукратная перестановка переменных t_2 и t_3 в $F(t_1, t_2, t_3)$ дает:

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv l^2 F(t_1, t_2, t_3), \tag{2'}$$

т. е. $l = \pm 1$.

Если каноническое [1] разложение полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ имеет вид

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=1}^{r_3} f_{3k} \sum_{j=1}^{r_2} f_{2j} \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_{jk}^{(i)} f_{1i}, \tag{3}$$

где $f_{li} \equiv f_{li}(t_l)$, то для симметричного относительно t_2, t_3 уравнения

$$f_{2j}(t) \equiv f_{3j}(t) \quad (j = 1, \ldots, r_2 = r_3). \tag{4}$$

A-матрица $T^{(1)}$ полинома $F(t_1, t_2, t_3)$, как и его каноническая A-матрица $\overline{T}^{(1)}$ будут при $l = 1$ симметрическими, а при $l = -1$ — кососимметрическими.

В дальнейшем будем считать, что уравнение (1) содержит неприводимый множитель от всех трех переменных и свободно от множителей, зависящих лишь от одной какой-либо переменной.

Если уравнение (1) допускает рациональную анаморфозу и среди его номограмм нет номограмм нулевого жанра относительно t_1, то базисы переменных t_2 и t_3 в его анаморфозах будут совпадать и, кроме того, будут тождественны уравнения шкал этих переменных. Отсюда следует, что для данного типа уравнений существует такая анаморфоза, в которой элементы строк переменных t_2 и t_3 являются образующими канонического разложения (приведенного) полинома Массо $\Phi(t_1, t_2, t_3)$, отвечающего уравнению (1). Такую анаморфозу назовем канонической.

Полином $F(t_1, t_2, t_3)$ симметричного относительно t_2, t_3 уравнения:

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=1}^{r} f_{3k} \sum_{j=1}^{r} f_{2j} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{jk}^{i} f_{1i} = 0 \tag{1'}$$

тогда и только тогда полином Массо, если в его каноническом разложении (1′) $r = 3$ и его A-матрица $T^{(1)}$ кососимметрическая.

Для полиномов (1′), при указанных условиях, каноническая A-матрица $\overline{T}^{(1)}$ будет иметь вид

$$\begin{array}{c|ccc} \overline{T}^{(1)} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ \hline f_{21} & 0 & \Sigma\,\alpha_{12}^{(i)} f_{1i} & -\Sigma\,\alpha_{13}^{(i)} f_{1i} \\ f_{22} & -\Sigma\,\alpha_{12}^{(i)} f_{1i} & 0 & \Sigma\,\alpha_{23}^{(i)} f_{1i} \\ f_{23} & \Sigma\,\alpha_{13}^{(i)} f_{1i} & -\Sigma\,\alpha_{23}^{(i)} f_{1i} & 0 \end{array} \qquad (5)$$

т. е. является матрицей Массо. Следовательно, эти полиномы имеют каноническую анаморфозу.

Что касается уравнений вида

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=1}^{r} f_{3k} \sum_{j=1}^{r} f_{2j} \sum_{i=1}^{2} \alpha_{jk}^{(i)} f_{1i} = 0, \qquad (1'')$$

то они могут быть анаморфозируемы и при отсутствии канонической анаморфозы; примером может служить, кроме уравнений нулевого жанра, симметричное по t_2, t_3 уравнение

$$f_{11}(f_{21} + f_{31}) - f_{12}(f_{22} + f_{32}) = 0, \quad [f_{2j}(t) \equiv f_{3j}(t)]. \qquad (6)$$

Для того чтобы полином уравнения (1'') являлся полиномом Массо с канонической анаморфозой, необходимо и достаточно, чтобы $r = 3$ и его A-матрица $T^{(1)}$ была кососимметрической.

Назовем алгебраическое уравнение $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ (полином $F(t_1, t_2, t_3)$) уравнением (полиномом) типа $[r_1, r_2, r_3]$, если r_i — число членов в каноническом по t_i разложении полинома $F(t_1, t_2, t_3)$. Как было указано, симметричные относительно t_2, t_3 уравнения типа [2; 3; 3], [3; 2; 2] и [3; 3; 3] всегда допускают непосредственную анаморфозу, если A-матрица $T^{(1)}$ полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ является кососимметрической; это же будет иметь место, как показывает пример (6), для некоторых уравнений типа [2; 3; 3] (и только этого типа) и в случае симметрической A-матрицы.

Рассмотрим вопрос об анаморфозируемости нормальных, симметричных относительно t_2, t_3 уравнений (1) с помощью множителя $\psi_1(t_2, t_3)$. Если уравнение (1) допускает анаморфозирующий множитель $\psi_1(t_2, t_3)$ и $\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv \psi_1(t_2, t_3)\, F(t_1, t_2, t_3)$ является, следовательно, полиномом Массо, то число членов в каждом каноническом разложении полинома $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ будет равно двум или трем. Но системы образующих разложения по t_1 полиномов $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ и $F(t_1, t_2, t_3)$ совпадают. Отсюда следует, что это число таково же и для $F(t_1, t_2, t_3)$. Кроме того полином $F(t_1, t_2, t_3)$ должен быть симметрическим относительно t_2, t_3, так как в случае коссимметрической A-матрицы $T^{(1)}$ полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ он имеет множитель $(t_2 - t_3)$ и поэтому не допускает нормальных анаморфоз с помощью множителя $\psi(t_2, t_3)$ [2].

Что касается формы анаморфозирующего множителя в случае нормального, симметричного относительно t_2, t_3 уравнения, то для уравнения типа $[3; r; r]$ $\psi_1(t_2, t_3) = (t_2 - t_3)$ (с точностью до постоянного множителя). Для уравнений же типа $[2; r; r]$ не нулевого жанра кроме указанной формы еще возможна форма

$$\psi_1(t_2, t_3) \equiv a t_2 t_3 + b(t_2 + t_3) + d, \qquad (7)$$

где a, b, d — некоторые постоянные. Это утверждение следует из того, что в случае нормальных анаморфоз $\psi_1(t_2, t_3)$ — функция линейная и от t_2 и от t_3, а $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ — симметричное относительно этих переменных уравнение; для уравнения типа $[3; r; r]$ $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ обладает, кроме того, только кососимметрической A-матрицей $T^{(1)}$.

Укажем те условия, при которых уравнение (1) допускает анаморфозирующий множитель $(t_2 - t_3)$. Напишем уравнение (1) в виде

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=0}^{m} t_3{}^k \sum_{j=0}^{m} t_2{}^j \sum_{i=1}^{r_1} a_{jk}^{(i)} f_{1i} \equiv \sum_{k=0}^{m} t_3{}^k F_k^{(12)} = 0. \tag{8}$$

Если (8) допускает множитель $(t_2 - t_3)$, то необходимо, чтобы при $r_1 = 3$ ранг A-матрицы (с постоянными элементами) полинома $F_m^{(12)} = F_m(t_1, t_2)$ был равен двум. Это непосредственно следует из того, что $F_m^{(12)} \equiv -\overline{F}_1^{(12)}$, где $\overline{F}_1^{(12)}$ — коэффициент канонического по t_3 разложения полинома Массо

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv (t_2 - t_3) F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=1}^{3} \overline{f}_{3k} \overline{F}_k^{(12)}, \tag{9}$$

а эти коэффициенты являются адъюнктами детерминанта Массо

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv |\overline{f}_{l1}, \overline{f}_{l2}, \overline{f}_{l3}| \tag{10}$$

с линейно независимыми элементами.

Назовем характеристическими числами уравнения (8) степени полиномов $\overline{f}_{l2}$, $\overline{f}_{l3}$ $(l = 2, 3)$ в канонической его анаморфозе (10).

При $r_1 = 3$ эти числа могут быть определены из кусочной A-матрицы полинома $F_m^{(12)}$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\overline{T}^{(3)} & t_2^m & \cdot\,\cdot & t_2^\mu & \cdot\,\cdot & t_2^\nu & \cdot\,\cdot & 1 \\
\hline
f_{11} & a_{mm}^{(1)} & \cdot\,\cdot & a_{\mu m}^{(1)} & \cdot\,\cdot & a_{\nu m}^{(1)} & \cdot\,\cdot & a_{0m}^{(1)} \\
f_{12} & a_{mm}^{(2)} & \cdot\,\cdot & a_{\mu m}^{(2)} & \cdot\,\cdot & a_{\nu m}^{(2)} & \cdot\,\cdot & a_{0m}^{(2)} \\
f_{13} & a_{mm}^{(3)} & \cdot\,\cdot & a_{\mu m}^{(3)} & \cdot\,\cdot & a_{\nu m}^{(3)} & \cdot\,\cdot & a_{0m}^{(3)}
\end{array} \tag{11}$$

Если именно столбцы $a_{\mu m}^{(i)}$ и $a_{\nu m}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ суть первые, не выражающиеся линейно через им предшествующие, то μ и ν — характеристические числа уравнения (8), допускающего множитель $(t_2 - t_3)$.

При $r_1 = 2$ матрица (11) определит в случае линейной зависимости элементов $\overline{f}_{12}$ и $\overline{f}_{13}$ лишь одно из этих чисел. Положим, для определенности, что это число μ. Тогда второе число ν определяется из A-матрицы полинома $-F_{\mu-1}^{(12)} + t_2 F_\mu^{(12)}$ вида (11).

Если μ и ν — характеристические числа уравнения (8), то коэффициенты канонического по t_3 разложения полинома (9) $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ будут

$$\overline{F}_1^{(12)} = -F_m^{(12)}, \ \overline{F}_2^{(12)} = -F_{\mu-1}^{(12)} + t_2 F_\mu^{(12)}, \ \overline{F}_3^{(12)} = -F_{\nu-1}^{(12)} + t_2 F_\nu^{(12)}. \tag{12}$$

Отсюда получаются следующие необходимые условия того, что уравнение $F(t_1, t_2, t_3)$ допускает анаморфозирующий множитель $(t_2 - t_3)$:

а) $F(t_1, t_2, t_3)$ — симметрический относительно t_2, t_3 полином;

б) в последовательности

$$-F_m^{(12)};\ -F_{m-1}^{(12)} + t_2 F_m^{(12)}; \ldots;\ -F_{\mu-1}^{(12)} + t_2 F_\mu^{(12)} \ldots$$
$$\ldots;\ -F_{\nu-1}^{(12)} + t_2 F_\nu^{(12)}; \ldots;\ t_2 F_0^{(12)} \tag{13}$$

найдутся три члена

$$\overline{F}_1^{(12)},\ \overline{F}_2^{(12)},\ \overline{F}_3^{(12)} \tag{12'}$$

таких, что каждый из членов последовательности (13) удовлетворяет тождественно равенству

$$-F_{j-1}^{(12)} + t_2 F_j^{(12)} \equiv \beta_j \overline{F}_1^{(12)} + \gamma_j \overline{F}_2^{(12)} + \delta_j \overline{F}_3^{(12)} \quad (j = \nu, \ldots, m+1), \tag{14}$$

где β_j, γ_j, δ_j — некоторые постоянные.

Условия а) и б) также достаточны. При их выполнении элементы канонической анаморфозы (10) будут выражаться формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{f}_{l1}=t_l^{m+1}+\sum_{k=0}^{m}\beta_k t_l^k, && \overline{f}_{11}=\sum_{i=1}^{3}\left[a_{\nu,\mu-1}^{(i)}-a_{\nu-1,\mu}^{(i)}\right]f_{1i},\\
&\overline{f}_{l2}=t_l^{\mu}+\sum_{k=0}^{\mu-1}\gamma_k t_l^k, && \overline{f}_{12}=-\sum_{i=1}^{3}a_{\nu m}^{(i)}f_{1i},\\
&\overline{f}_{l3}=t_l^{\nu}+\sum_{k=0}^{\nu-1}\delta_k t_l^k, && \overline{f}_{13}=\sum_{i=1}^{3}a_{\mu m}^{(i)}f_{1i}\\
&(l=2,3;\ \beta_\mu=\beta_\nu=\gamma_\nu=0).
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Рассмотрим теперь тернарно симметричное уравнение

$$F(t_1,t_2,t_3)\equiv\sum_{k=1}^{r}f_{3k}\sum_{j=1}^{r}f_{2j}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{jk}^{(i)}f_{1i}=0\ \ [f_{1l}(t)\equiv f_{2l}(t)\equiv f_{3l}(t)],\tag{16}$$

т. е. уравнение, симметричное относительно любой пары переменных t_1, t_2, t_3.

Все A-матрицы полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ уравнения (16) одновременно симметрические или кососимметрические, так как из тождеств

$$F(t_1,t_2,t_3)\equiv l_1F(t_1,t_3,t_2)\equiv l_2F(t_3,t_2,t_1)\equiv l_3F(t_2,t_1,t_3)\tag{17}$$

следует, что $l_1=l_2=l_3=\pm 1$.

При $r=2$ вопрос об анаморфозах уравнения (16) ясен. Для других случаев полином $F(t_1, t_2, t_3)$ будет тогда и только тогда полиномом Массо, если его A-матрицы — кососимметрические, а канонические его разложения имеют по три члена ($r=3$).

Что касается анаморфозирующего множителя при $r\geqslant 3$, то в случае нормальных анаморфоз он существует лишь для симметрических (тернарно) полиномов $F(t_1, t_2, t_3)$, т. е. полиномов уравнения (16) с симметрическими A-матрицами. При этом анаморфозирующий множитель имеет единственную форму.

$$\psi_1(t_1,t_2,t_3)\equiv(t_1-t_2)\,(t_2-t_3)\,(t_3-t_1).\tag{18}$$

Для того чтобы уравнение

$$F(t_1,t_2,t_3)\equiv\sum_{k=0}^{m}t_3^{\,k}F_k^{(12)}=0\tag{19}$$

допускало анаморфозирующий множитель вида (18), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) $F(t_1, t_2, t_3)$ — симметрический (тернарно) полином;

б) в последовательности

$$-F_{j-1}^{(12)}+(t_1+t_2)F_j^{(12)}-t_1t_2F_{j+1}^{(12)}\quad(j=0,\ldots,m+1)\tag{20}$$

найдутся три члена $\overline{F}_1^{(12)}$, $\overline{F}_2^{(12)}$, $\overline{F}_3^{(12)}$ таких, что каждый из членов последовательности (20) — линейная комбинация этих трех членов.

Эти условия будут найдены, если к уравнению

$$'F(t_1,t_2,t_3)\equiv(t_1-t_2)\,(t_3-t_1)\,F(t_1,t_2,t_3)=0\tag{21}$$

применить необходимые и достаточные условия того, что оно допускает анаморфозирующий множитель (t_2-t_3).

Из последовательности (13) легко получить последовательность (20); элементы канонической анаморфозы уравнения (19) могут быть найдены с помощью формул (14) и (15).

Поступило
9 V 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, XXVIII, № 9 (1940). [2] П. В. Николаев, ДАН, XXVIII, № 7 (1940).