Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О ЧИСТО РАЗРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 VI 1944)

Рассмотрим систему $\mathfrak{N}$, которая может находиться в состояниях, образующих множество $\mathfrak{A}$. Предположим, что изменение состояния совершается мгновенно, причем число этих изменений конечно в каждом ограниченном промежутке времени, но может быть сколь угодно большим. Пусть определено семейство $\mathfrak{M}$ подмножеств пространства $\mathfrak{A}$, содержащее какие угодно разности и конечные или счетные суммы своих элементов, отдельные элементы $\mathfrak{A}$, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество. Мы будем рассматривать в последующем абстрактные интегралы Lebesgue'a — Stieltjes'a и обозначать их символом

$$\int_{\mathfrak{A}_k} f(x_k)\,\varphi(d\mathfrak{A}_k),$$

где функция $f(x)$ измерима относительно $\mathfrak{M}$ и ограничена, функция множества $\varphi(E)$ вполне аддитивна ($x\subset\mathfrak{A}$, $E\subset\mathfrak{M}$); $\mathfrak{A}_k=\mathfrak{A}$, причем индекс k указывает, что $\mathfrak{A}_k$ есть область интегрирования, соответствующая переменной x_k ($k=1, 2, \ldots$).

Пусть в абсолютно начальный момент времени t_0 система $\mathfrak{N}$ находится в состоянии x_0, а в момент t в состоянии x. Предположим, что в промежутке времени $t_0<s<t$ изменение состояния произошло в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, и обозначим через x_k неизменное состояние в промежутке времени $t_k<s\leqslant t_{k+1}$ ($k=1, 2, \ldots, n$; $t_{n+1}=t$, $x_n=x$: $n=0, 1, 2, \ldots$).

Пусть при этих условиях вероятность одного изменения состояния за время $t\leqslant s<\tau$ определяется суммой

$$p_n(t, x; t_1, x_1; t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n)(\tau-t)+(\tau-t)\varepsilon_n,$$

где ε_n равномерно ограничено и бесконечно мало, если $\tau-t$ стремится к нулю ($n=0, 1, 2, \ldots$). Пусть при дополнительном условии, что в момент t происходит изменение состояния, функция $P_n(t, x, E; t_1, x_1; t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n)$ выражает вероятность того, что в моменты времени, достаточно близкие к t и последующие за t, состояние будет принадлежать множеству E ($n=0, 1, 2, \ldots$). Относительно функций p_n и P_n мы предположим, что они интегрируемы в смысле Римана по каждой из переменных $t_1, t_2, \ldots$, неотрицательны и измеримы относительно $\mathfrak{M}$ по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots$ Мы допустим, кроме того, что функции p_n равномерно ограничены, а функции P_n вполне аддитивны и не превосходят единицы. Все эти предположения мы будем считать относящимися к области

$-T < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < T$, $x_1 \subset \mathfrak{A}$, $x_2 \subset \mathfrak{A}, \ldots$; $E \subset \mathfrak{M}$; где T — некоторая постоянная.

Такого рода процессы в случае отсутствия последействия рассматривались Феллером (1) и мною (2). Общность постановки вопроса заимствована мною у Колмогорова (3).

Обозначим через $\pi_n(t, x, \tau) = \pi_n(t, x, \tau;\ t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n)$ вероятность того, что изменения состояния за время $t \leqslant s < \tau$ не произойдет. Функция $\pi_n(t, x, \tau)$, очевидно, удовлетворяет тождеству

$$\pi_n(t, x, \tau) = \pi_n(t, x, \tau + \Delta\tau) + \pi_n(t, x, \tau)\,[1 - \pi_n(\tau, x, \tau + \Delta\tau)].$$

С другой стороны, обозначив через K общую верхнюю границу функций p_n и ε_n, будем иметь

$$1 - \pi_n(\tau, x, \tau + \Delta\tau) = p_n(\tau, x;\ t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n)\,\Delta\tau + \Delta\tau\varepsilon_n + \delta,$$

где

$$\delta \leqslant (2K\Delta\tau)^2 + (2K\Delta\tau)^3 + \ldots,$$

откуда функция $\pi_n(t, x, \tau)$ непрерывна по τ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \pi_n(t, x, \tau)}{\partial \tau} = -\pi_n(t, x, \tau)\,p_n(\tau, x;\ t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n),$$

где мы имеем производную справа, и, следовательно, π_n определяется равенством

$$\pi_n(t, x, \tau;\ t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n) = e^{-\int\limits_t^\tau p_n(s,\, x;\ t_1,\, x_1;\ t_2,\, x_2;\, \ldots;\ t_n,\, x_n)\,ds}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть известно, что в момент t система находится в каком-либо состоянии из множества e ($e \subset \mathfrak{M}$). Поставим себе задачу определить вероятность $F(t, e, \tau, E)$ того факта A, что в момент τ состояние будет принадлежать множеству E ($E \subset \mathfrak{M}$).

Для решения этой задачи мы выдвинем всевозможные гипотезы относительно хода процесса до момента t и определим их вероятности a priori, а также их вероятности a posteriori при условии осуществления факта, состоящего в том, что в момент t состояние принадлежит e. Для этого мы воспользуемся формулами Байесса (последние в случае бесконечного множества гипотез выяснены в (4)). Затем, составляя произведения вероятности каждой гипотезы a posteriori на вероятность факта A при условии этой гипотезы, суммируя полученные произведения и переходя к пределу, мы определим искомую вероятность $F(t, e; \tau, E)$.

Полагая

$$\varphi_{k+1}(E) = \pi_k(t_k, x_k, t_{k+1};\ t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_k, x_k) \times$$
$$\times p_k(t_{k+1}, x_k; t_1, x_1;\ t_2, x_2; \ldots; t_k, x_k)\,P_k(t_{k+1}, x_k, E; t_1, x_1; t_2, x_2; \ldots; t_k, x_k),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\mathrm{E}(x, E) = 1$, если $x \subset E$ и $\mathrm{E}(x, E) = 0$, если $x \subset \mathfrak{A} - E$, легко видеть, что вероятность $F(t, e, \tau, E)$ определится следующим образом:

$$F(t, e, \tau, E) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P^{(m,n)},$$

где

$$P^{(m,n)} = \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{\mathfrak{A}_1} \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{t} dt_n \int\limits_{\mathfrak{A}_n} \int\limits_{t}^{\tau} dt_{n+1} \int\limits_{\mathfrak{A}_{n+1}} \int\limits_{t_{n+1}}^{\tau} dt_{n+2} \int\limits_{\mathfrak{A}_{n+2}} \cdots \int\limits_{t_{n+m-1}}^{\tau} dt_{n+m} \int\limits_{\mathfrak{A}_{n+m}} \Omega_{m,n};$$

$$\Omega_{m,n} = \mathrm{E}(x_n, e)\,\mathrm{E}(x_{n+m}, E)\,\pi_{n+m}(t_{n+m}, x_{n+m}, \tau) \prod_{k=1}^{n+m} \varphi_k(d\mathfrak{A}_k);$$

$$Q_n = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{\mathfrak{A}_1} \int_{t_1}^{t} dt_2 \int_{\mathfrak{A}_2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{t} dt_n \int_{\mathfrak{A}_n} \mathrm{E}(x_n, e)\,\pi_n(t_n, x_n, t) \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(d\mathfrak{A}_k).$$

Нетрудно убедиться, что имеют место оценки

$$0 \leqslant P^{(m,n)} \leqslant \frac{(\tau - t)^m (t - t_0)^n}{m!\,n!} K^{m+n},$$

$$0 \leqslant Q_n \leqslant \frac{(t - t_0)^n}{n!} K^n$$

($m, n = 0, 1, 2, \ldots$), откуда вытекает, что рассматриваемые ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Feller, Math. Ann., 113 (1936). [2] В. Дубровский, ДАН, XIX, 439 (1938); Он же, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 411 (1940). [3] A. Kolmogoroff, Math. Ann., 104 (1930). [4] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей. М.—Л., 1936.