Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 VI 1944)

Пусть E — сепарабельное пространство Банаха [1]. Последовательность $\{x_i\}$ элементов E называется полной в E, если замкнутая линейная оболочка над $\{x_i\}$ совпадает с E. Последовательность $\{x_i\}$ называется ограниченной, если $\sup\limits_i \| x_i \| < \infty$. Последовательность $\{x_i\}$ называется минимальной [2], если ни один из ее элементов не принадлежит замкнутой линейной оболочке над остальными.

Очевидно, что если $\{x_i\}$ минимальна, то существует последовательность линейных функционалов $\{F_i\}$, образующая вместе с $\{x_i\}$ биортогональную систему. Если к тому же $\{x_i\}$ — полная последовательность, то F_i определяется однозначно.

Последовательность $\{x_i\}$ назовем строго минимальной или минимальной в строгом смысле, если существует такая константа $\delta > 0$, что расстояние от любого x_i до линейной оболочки над остальными элементами (x_j; $j \neq i$) больше или равно δ.

Мы будем говорить, что $\{x_i\}$; $\{F_i\}$ правильная биортогональная система, если $\{x_j\}$ — полная последовательность и, кроме того, одновременно выполняются условия: $\sup\limits_i \| x_i \| < \infty$ и $\sup\limits_i | F_i | < \infty$.

Биортогональная система $\{x_i\}$; $\{F_i\}$ является правильной в том и только в том случае, когда $\{x_i\}$ полная, ограниченная, строго минимальная последовательность. При этом $\delta = \dfrac{1}{\sup\limits_i | F_i |}$ — наибольшее из возможных значений δ. Последовательность $\{x_i\}$ называется базисом в E, если каждый элемент $x \in E$ может быть представлен единственным образом в виде $x = \sum\limits_1^\infty a_i x_i$. Очевидно, что базис есть полная строго минимальная система. В дальнейшем будут использованы следующие обозначения: l_n — линейная оболочка над элементами x_1, $x_2, \ldots, x_n$ последовательности $\{x_i\}$; l^n — замкнутая линейная оболочка над x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$; S_n — поверхность единичной сферы в l_n, т. е. совокупность всех элементов x, удовлетворяющих условиям $x \in l_n$ и $\| x \| = 1$; S^n — поверхность единичной сферы в l^n.

§ 1. Пусть

$$\{x_i\}; \{F_i\} \tag{I}$$

биортогональная система, в которой $\{x_i\}$ полная последовательность и $\sup\limits_i \| x_i \| < \infty$.

Теорема 1. 1° *Для того чтобы система (I) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = 0 \text{ *для любого* } x \in E. \tag{1}$$

2° *Для того чтобы последовательность $\{F_i\}$ системы* (I) *была тотальной, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех многообразий I^n содержало только нулевой элемент.*

В дальнейшем будет существенно использован следующий результат, полученный нами в ([3]).

Теорема 2. *Для того чтобы полная последовательность $\{x_i\}$ являлась базисом в E, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $\alpha > 0$, что*

$$\rho(S_n, S^n) > \alpha \text{ для всех } n$$

(здесь $\rho(S_n, S^n)$ — расстояние между S_n и S^n).

§ 2. Пусть (I) правильная биортогональная система и

$$\sup_i \| x_i \| = Q; \quad \sup_i | F_i | = M; \quad \delta = 1/M. \tag{2}$$

Пусть ε_n — последовательность чисел, определенных формулами:

$$\varepsilon_n = \frac{\delta - (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n)}{2Q} \gamma_n, \tag{3}$$

в которых γ_n — любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_n \geqslant 0 \text{ и } \sum_1^\infty \gamma_n < \delta \tag{4}$$

(очевидно, что $\varepsilon_n \geqslant 0$).

Теорема 3. *Каковы бы ни были элементы $\eta_1, \eta_2 \ldots$, удовлетворяющие условиям $\| \eta_n \| < \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, последовательность $\{y_i = x_i + \eta_i\}$ имеет сопряженную последовательность $\{F_i\}$, и биортогональная система*

$$\{y_i\}; \{F_i\} \tag{II}$$

правильна. При этом $|F_i| < 1/(\delta - \gamma)$, *где* $\gamma = \sum_1^\infty \gamma_i$.

Теорема 3'. *Последовательность $\{y_i = x_i + \eta_i\}$, где η_i — любые элементы пространства E, удовлетворяющие условию*

$$\sum_1^\infty \| \eta_i \| < \delta^2/8Q,$$

имеет сопряженную последовательность $\{F_i\}$, и биортогональная система $\{y_i\}; \{F_i\}$ правильна.

Теорема 3' следует прямо из теоремы 3. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно отметить, что какова бы ни была последовательность положительных чисел d_i, удовлетворяющих условию $\sum_1^\infty d_i < \delta^2/8Q$, всегда можно подобрать последовательность положительных чисел γ_n, удовлетворяющих условию $\sum_1^\infty \gamma_n < \delta$, чтобы для чисел ε_n, определенных формулами (3), выполнялись неравенства

$$d_n < \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 4. *Если последовательность* $\{\mathrm{F}_n\}$ *правильной биортогональной системы* (I) *тотальна, то и последовательность* $\{F_i\}$ *системы* (II) *также тотальна.*

Каждому элементу $x \in E$ соответствует последовательность чисел $\{\mathrm{F}_i(x)\}$ — коэффициентов Фурье по системе (I). Обозначим через $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ многообразие всех этих последовательностей и через $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ соответствующее многообразие для системы (II), т. е. многообразие последовательностей $\{F_i(x)\}$, $x \in E$.

Теорема 5. $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}} \equiv \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$. Точнее: *система уравнений*

$$\mathrm{F}_i(x) = F_i(y) \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

имеет решение относительно x *при любом* $y \in E$ *и, равным образом, имеет решение относительно* y *при любом* $x \in E$.

Если $\{\mathrm{F}_i\}$ *тотальна, то система уравнений* (5) *определяет линейное и взаимно-однозначное отображение* E *на самого себя.*

Для последовательностей $\{\mathrm{F}_i\}$ и $\{F_i\}$ имеют место теоремы:

Теорема 6. *Каково бы ни было число* σ, *ему соответствует такое число* ε, *что если* $\sum\limits_1^{\infty} \| \eta_i \| < \varepsilon$, *то* $|\mathrm{F}_i - \mathrm{F}_i| < \sigma$ *равномерно по* i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Точнее: *если* $\| \eta_i \| < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *где* ε_i *числа, определенные формулами* (3), *то для всех* i *будем иметь*

$$|F_i - \mathrm{F}_i| < \frac{\delta}{\delta(\delta - \gamma)},$$

где $\gamma = \sum\limits_1^{\infty} \gamma_i$ *(из* $\varepsilon \to 0$ *следует* $\gamma \to 0$*).*

Теорема 7.

$$\lim_{n \to \infty} |F_n - \mathrm{F}_n| = 0.$$

Замечание. Ряд $\sum\limits_1^{\infty} |F_n - \mathrm{F}_n|$, вообще говоря, расходится. В том случае, когда этот ряд сходится при любом выборе $\{\eta_i\}$, удовлетворяющих условиям $\| \eta_i \| < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, сходится и ряд $\sum\limits_1^{\infty} |\mathrm{F}_i(x)|$ для любого $x \in E$.

§ 3. Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех полных ограниченных строго минимальных последовательностей в E. Элементы $\mathfrak{M}$ будем обозначать в дальнейшем буквами ξ, ζ, χ. Таким образом, $\xi \equiv \{x_i^{\xi}\}$. Вследствие полноты $\{x_i^{\xi}\}$ каждому элементу ξ однозначно соответствует последовательность $\{\mathrm{F}_i^{\xi}\}$, сопряженная с $\{x_i^{\xi}\}$. Кроме того каждому элементу $\xi \in \mathfrak{M}$ однозначно соответствуют числа $\delta(\xi) = \dfrac{1}{\sup\limits_i |\mathrm{F}_i^{\xi}|}$ и $Q(\xi) = \sup \| x_i^{\xi} \|$. Вводя обозначения S_n^{ξ} и $S^{n\xi}$, соответствующие прежним S_n и S^n (см. вводную часть), определяем число $\alpha(\xi)$, полагая $\alpha(\xi) = \inf\limits_n \rho(S_n^{\xi}, S^{n\xi})$. Если $\alpha(\xi) > 0$, то $\{x_i^{\xi}\}$ базис в E (см. теорему 2).

Опираясь на теорему 3, можно естественным образом топологизировать $\mathfrak{M}$.

Мы будем говорить, что элемент $\xi \equiv \{x_i^\xi\}$ имеет ε-окрестность, если любая последовательность $\{y_i = x_i + \eta_i\}$, в которой η_i удовлетворяют условию $\sum_1^\infty \| \eta_i \| < \varepsilon$, является полной ограниченной и минимальной в строгом смысле (т. е. определяет некоторый элемент многообразия $\mathfrak{M}$).

Из замечания к теореме 3', § 2 следует, *что всякий элемент имеет ε-окрестность, если положить* $\varepsilon < \frac{[\delta(\xi)]^2}{\delta Q(\xi)}$.

Условимся обозначать ε-окрестность элемента ξ символом U_ξ^ε. Мы будем считать U_ξ^ε окрестностью любого элемента многообразия $\mathfrak{M}$, содержащегося в U_ξ^ε. Нетрудно видеть, что:

A. *Система всех множеств U_ξ^ε обладает свойствами, характеризующими полную систему окрестностей топологического пространства.*

Будем буквой $\mathfrak{M}$ обозначать топологическое пространство.

B. *Функция $\delta(\xi)$ непрерывна на $\mathfrak{M}$.*

Теорема 8. *Функция $\alpha(\xi)$ непрерывна на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство этой теоремы опирается на теоремы 2 и 3.

М. Крейн, М. Рутман и Д. Мильман доказали следующее предложение ([4]).

Если $\{x_i\}$ — базис в E, то существует такая последовательность положительных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots$, что последовательность $\{y_i = x_i + \eta_i\}$ также является базисом, если только элементы удовлетворяют условиям $\| \eta_i \| < \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Из теоремы 8 непосредственно следует несколько улучшенное предложение. Именно:

Теорема 9. *Если $\{x_i\}$ — базис в E, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что каковы бы ни были элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots$, удовлетворяющие условию $\sum_1^\infty \| \eta_i \| < \varepsilon_i$, последовательность $\{y_i = x_i + \eta_i\}$ также является базисом в E.*

Мы будем говорить, что элемент $\xi \in \mathfrak{M}$ может быть связан конечной цепочкой с элементом $\zeta \in \mathfrak{M}$, если существует конечная последовательность элементов $\xi_1 = \xi$; $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$; $\xi_n = \zeta$, и такая последовательность окрестностей $U_{x_1}^{\varepsilon_1}$; $U_{x_2}^{\varepsilon_2}$; $\ldots$; $U_{x_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$, в которой каждая $U_{x_k}^{\varepsilon_k}$ содержит элемент ξ_k и в то же время элемент ξ_{k-1}.

Обозначим через $\mathfrak{N}_\xi$ совокупность всех элементов $\zeta \in \mathfrak{M}$, которые могут быть связаны конечными цепочками с ξ. Очевидно, что если $\xi'' \in \mathfrak{N}_{\xi'}$, то $\xi' \in \mathfrak{N}_{\xi''}$.

Теорема 10. 1° *$\mathfrak{N}_\xi$ есть замкнутое и в то же время открытое множество, $\mathfrak{N}_\xi$ не может быть представлено в виде суммы двух непересекающихся замкнутых множеств. Иначе говоря, $\mathfrak{N}_\xi$ есть компонента связности пространства $\mathfrak{M}$. Обратно—всякая компонента связности $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{M}$ есть $\mathfrak{N}_\xi$ для любого $\xi \in \mathfrak{N}$.*

2° *$\mathfrak{N}$ метризуемое пространство.*

Среднеазиатский государственный
университет
Ташкент

Поступило
22 VI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [2] S. Lewin, Math. Z., 32, 44 (1930). [3] М. М. Гринблюм, ДАН, XXXI, № 5 (1941). [4] М. Крейн, М. Рутман и Д. Мильман, Записки Харьковск. мат. общ., IV, сер 16 (1940).