Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

ГЕОФИЗИКА

А. И. ЛЕБЕДИНСКИЙ

ОБ ОШИБКЕ В ТЕОРИИ КОНВЕКЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 21 IV 1940)

Согласно теории Шмидта (1) и Тайлора (2) перенос тепловой энергии в атмосфере, обусловленный конвекционным теплообменом, определяется уравнением

$$H_k = -c_p \rho v l \left[\frac{g}{c_p} + \frac{d\overline{T}}{dz} \right] = c_p \rho v l \chi. \tag{1}$$

Здесь H_k — поток энергии, переносимый конвекционными токами, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность, $\frac{d\overline{T}}{dz}$ — температурный градиент, g — ускорение силы тяжести, v — скорость, а l — длина пути смешения (Mischungsweg) конвекционных токов. При выводе уравнения (1) его авторы предполагали, что: а) длина пути смешения $l \ll h$, где h — толщина слоя, в котором происходит конвекция; b) потенциальная температура вихря в течение всего времени его движения не изменяется, и, лишь рассеиваясь, конвекционный ток обменивается энергией с окружающей средой. Ниже мы покажем, что эти два предположения взаимно исключают друг друга.

В этой статье мы всюду будем предполагать, что: а) конвекция термическая, обусловленная наличием неустойчивости, т. е. тем, что градиент температуры больше адиабатического; b) атмосфера находится в стационарном состоянии и изотропна в горизонтальном направлении, т. е. все средние значения функций точки зависят только от высоты z, но не от времени t и горизонтальных координат x и y.

Мы будем называть восходящим током геометрическое место точек, в которых $u_z > 0$. Будем считать все линии $u_z = 0$, $z = \text{const}$ замкнутыми. Обозначим

$$j = \iint \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z \delta)\, dx\, dy,$$

где δ — флюктуация температуры, а $\vec{u}$ — вектор скорости с компонентами u_x, u_y, u_z.

Интеграл распространяется внутри одной горизонтальной площадки, ограниченной линией $u_z = 0$, $z = \text{const}$. Для каждого отдельного восходящего тока j является функцией z и t. Условимся называть нижней частью восходящего тока ту его часть, в которой $j > 0$, а верхней ту, в которой $j < 0$. Пусть будет ψ непрерывная функция точки. Условимся обозначать через $\overline{\psi}$ ее среднее значение на данном уровне, через $\overset{-+}{\psi}$ среднее в точках, где $u_z > 0$, т. е. внутри восходящих токов, а через $\overset{-+}{[\psi]}_1$ и $\overset{-+}{[\psi]}_2$ — средние, образованные отдельно в нижних и верхних частях восходящих токов. Для того чтобы получить $\overset{-+}{[\psi]}$, нужно $\psi\, dx\, dy$ проинтегрировать внутри тех площадок достаточно большого участка горизонтальной плоскости, которые являются сечениями нижних частей восходящих токов, и разделить интеграл на площадь, по которой он был распространен. Обозначим через φ_1, φ_2 и φ отношения площади сечения нижних и верхних частей и всех восходящих токов к площади сечения нисходящих токов. По определению $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ и $\varphi_1 \overline{[\psi]}^{+}_1 + \varphi_2 \overline{[\psi]}^{+}_2 = \varphi \overline{\psi}^{+}$.

Мы предположим, что флюктуации температуры и плотности малы, т. е. что $|\delta| = |T - \overline{T}| \ll \overline{T}$ и $|\rho - \overline{\rho}| \ll \overline{\rho}$ и что можно пренебречь переносом кинетической энергии по сравнению с переносом тепловой энергии. Уравнение закона сохранения энергии можно написать в виде[3]:

$$c_v \frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta) - \frac{R}{\mu}\overline{T}\frac{\partial\rho}{\partial t} + c_p \operatorname{div}(\rho\vec{u}\delta) = c_p \rho u_z \chi + \rho J = c_p \rho u_z \chi - \operatorname{div}\vec{H} = \zeta. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{H}$ — поток энергии, переносимый радиацией и благодаря теплопроводности. Его компоненты H_x, H_y, H_z. Под теплопроводностью мы здесь можем подразумевать не только молекулярную, но и турбулентную теплопроводность, обусловленную более мелкой турбулентностью, по отношению к которой конвекционные токи можно рассматривать как осредненное движение. J — разность между количеством энергии, получаемой и отдаваемой единицей массы газа. c_v, c_p, g и молекулярный вес μ считаются постоянными. $R = 8{,}313 \cdot 10^7$ эрг град.$^{-1}$ мол.$^{-1}$.

Осредняя уравнение (2), получим:

$$\begin{aligned} c_v \overline{\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta)\right]}^{+}_1 - \frac{R}{\mu}\overline{T}\,\overline{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]}^{+}_1 + c_p \overline{[\operatorname{div}(\rho\vec{u}\delta)]}^{+}_1 &= \\ = \overline{[\rho J]}^{+}_1 + c_p\chi\,\overline{[\rho u_z]}^{+}_1 &= \overline{[\zeta]}^{+}_1, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} c_v \overline{\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta)\right]}^{+}_2 - \frac{R}{\mu}\overline{T}\,\overline{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]}^{+}_2 + c_p \overline{[\operatorname{div}(\rho\vec{u}\delta)]}^{+}_2 &= \\ = \overline{[\rho J]}^{+}_2 + c_p\chi\,\overline{[\rho u_z]}^{+}_2 &= \overline{[\zeta]}^{+}_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

Пользуясь обычным обозначением, мы будем писать $\alpha = O(\beta)$, если α и β — величины одного порядка.

Газовая масса, поднимаясь в неустойчивой атмосфере, приобретает температуру более высокую, чем температура окружающей среды, а опускаясь, — более низкую. Поэтому почти всюду u_z и δ одного знака, абсолютные величины значений δ на поверхностях $u_z = 0$ невелики и в качестве первого приближения можно положить $\delta = 0$ в точках, где $u_z = 0$ и $\delta > 0$ в точках, где $u_z > 0$. Тогда $\overline{[\operatorname{div}(\rho u_z\delta)]}^{+}_1 = \overline{\left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)\right]}^{+}_1$. $\rho u_z\delta$ обращается в нуль на поверхностях, ограничивающих восходящие токи, а наибольшие значения имеет в их центральной части. Поэтому уместно предположить, что в нижних частях восходящих токов почти всюду $\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)$ положительна, а в верхних — отрицательна, и следовательно $\overline{\left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)\right]}^{+}_1 = O\left(\frac{2}{l}\overline{\rho u_z\delta}^{+}\right)$.

При осреднении отдельно по нижним или верхним частям восходящих токов заменить среднее значение производной функции $\rho u_z\delta$ производными ее среднего значения нельзя, но $\overline{\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)}^{+} = \frac{d}{dz}\overline{(\rho u_z\delta)}^{+}$, ибо $\iint \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)\,dx\,dy$, распространенный по всем площадкам, в которых

$u_z > 0$ внутри конечного участка горизонтальной плоскости,— непрерывная функция z, а так как границами интегрирования служат линии $u_z = 0$ и границы участка, не зависящие от z, знак дифференцирования может быть вынесен за знак интеграла. Умножая (3) на φ_1, а (4) на φ_2 и складывая, получим

$$c_v \varphi \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta)}^{+} - \varphi \frac{R}{\mu} \overline{T}\, \overset{-+}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + c_p \varphi \frac{d}{dz} \overline{(\rho u_z \delta)}^{+} = \varphi_1 [\overset{-+}{\zeta}]_1 + \varphi_2 [\overset{-+}{\zeta}]_2 = \varphi \overset{-+}{\zeta}. \qquad (5)$$

При отсутствии корреляции между значениями ρ и δ в точках, где $u_z = 0$, и производными по времени горизонтальных координат этих точек, первые два члена правой части (5) равны нулю, а если средняя продолжительность существования конвекционных токов $\tau \gg \frac{l}{v}$ и вихри представляют собою нечто вроде конвекционных ячеек Бенара [4], медленно изменяющихся со временем, то вообще можно пренебречь первыми двумя членами (3) и (4), так как они стремятся к нулю при возрастании τ.

Мы предположим, что $\overset{-+}{\zeta}$ и $c_p \frac{d}{dz} \overline{(\rho u_z \delta)}^{+}$ одного порядка, и будем считать $\overset{-+}{\zeta} = O\left(\frac{2c_p}{h} \overline{\rho u_z \delta}^{+}\right)$. Следствием этого при $l \ll h$ является приближенное равенство

$$\varphi_1 [\overset{-+}{\zeta}]_1 = -\varphi_2 [\overset{-+}{\zeta}]_2. \qquad (6)$$

Чтобы убедиться в правильности (6), предположим противное: $\varphi_1 [\overset{-+}{\zeta}]_1 = O\left(\frac{2c_p}{h} \overline{\rho u_z \delta}^{+}\right)$. Считая для определенности $\varphi_1 = 0(\varphi)$, можно приравнять нулю левую часть (3), пренебрегая $[\overset{-+}{\zeta}]_1$ по сравнению с $c_p \left[\overline{\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z \delta)}^{+}\right]$, так как отношение этих членов порядка $\frac{l}{h}$. Получающееся уравнение

$$c_v \left[\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta)}^{+}\right]_1 - \frac{R}{\mu} \overline{T} \left[\overset{-+}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\right]_1 + c_p \left[\overline{\operatorname{div}(\rho \vec{u} \delta)}^{+}\right]_1 = 0 \qquad (7)$$

упрощается в случае несжимаемой жидкости, когда $c_p = c_v$ и $\rho = \text{const}$, принимая вид $\left[\overline{\frac{\partial \delta}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}\delta)}^{+}\right]_1 = 0$. Оно выражает условие сохранения величины $\rho\delta$, т. е. условие отсутствия теплообмена между нижними и верхними частями восходящих токов, что невозможно в случае термической конвекции. Поэтому уравнение (6) должно быть справедливо. Отметим, кроме того, без доказательства, что все три члена левой части (3) положительны, а (4) отрицательны, и поэтому приведенная выше оценка абсолютной величины $[\overset{-+}{\zeta}]_1$ не может быть преувеличенной.

При $|\delta| \ll \overline{T}$ теплообмен между какой-либо газовой массой и окружающей средой можно приближенно считать линейной функцией среднего значения δ внутри нее. Поэтому мы положим

$$[\overset{-+}{J}]_1 = \bar{J} - \eta_1 [\overset{-+}{\delta}]_1\; [\overset{-+}{J}]_2 = \bar{J} - \eta_2 [\overset{-+}{\delta}]_2 \text{ и } \overset{-+}{J} = \bar{J} - \eta \overset{-+}{\delta}. \qquad (8)$$

η_1, η_2 и η — функции средних значений величин, характеризующих конвекционные токи, в том числе и средних диаметров нижних и верхних частей восходящих токов. Если теплопроводностью можно пренебречь, оптическая толщина конвекционных токов мала по сравнению с единицей и осуществляются условия локального термодинамического равновесия, то η_1 и η_2 функции T, и следовательно, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

Если нет ветра и $\overline{\rho u_z}=0$, то, осредняя (2), получим $\overline{\rho J}=c_p\frac{d}{dz}\overline{(\rho u_z\delta)}$ и, следовательно, величиной $\overline{\rho J}$ можно пренебречь по сравнению с $\overset{-+}{[\zeta]}_1$ и $\overset{-+}{[\zeta]}_2$. Умножая (3) на φ_1, (4) на φ_2 и складывая, получим:

$$c_p\chi\overset{-\,-+}{\rho\, u_z}-\eta\overset{-\,-+}{\rho\,\delta}=\frac{1}{\varphi}\{\varphi_1\overset{-+}{[\zeta]}_1+\varphi_2\overset{-+}{[\zeta]}_2\}=0. \tag{9}$$

Если бы мы не предположили, что $\delta=0$ в точках, где $u_z=0$, то вместо (6) получилось бы $\varphi_1\overset{-+}{[\zeta]}_1=-\alpha\varphi_2\overset{-+}{[\zeta]}_2$, где α — зависящий от z множитель. В этом случае, исключая $\overset{-+}{[\zeta]}_1$ и $\overset{-+}{[\zeta]}_2$ из (3) и (4), получим:

$$c_p\chi\{\varphi_1\overset{-+}{[u_z]}_1+\alpha\varphi_2\overset{-+}{[u_z]}_2\}=\eta_1\varphi_1\overset{-+}{[\delta]}_1+\alpha\eta_2\varphi_2\overset{-+}{[\delta]}_2. \tag{10}$$

Если бы δ было постоянным, то, пренебрегая сжимаемостью газа, можно было бы считать третьи члены левой части уравнений (3) и (4) равными нулю. Так как δ велико в середине восходящего тока и мало по абсолютной величине на поверхности $u_z=0$, $[\overset{-+}{\operatorname{div}(\rho\vec{u}\delta)}]_1$ мало отличается от $\left[\overset{-+}{\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z\delta)}\right]_1$. Поэтому α близко к единице, и вместо (10) можно пользоваться уравнением (9).

Мы пришли к заключению, что при $l\ll h$ должно быть $|\bar{J}|\ll|\overset{-+}{J}|$, и поэтому получили уравнение (9). В предыдущей нашей статье ([3]) мы полагали $\bar{J}\approx\overset{-+}{J}$ и получили уравнение (1). Если поднимающаяся газовая масса настолько велика, что она почти не обменивается энергией с окружающей средой, то $\bar{J}\approx\overset{-+}{J}$. В этом случае в течение всего времени ее движения в неустойчивых слоях атмосферы ее температура и скорость возрастают. Убывать они начинают лишь после того, как она попадает в устойчивые слои, где $\chi<0$, и поэтому l и h величины одного порядка. Если, наоборот, поднимающаяся газовая масса теряет значительное количество энергии путем теплоотдачи, то она может рассеяться, т. е. остыть и остановиться, еще находясь в пределах неустойчивого слоя, пройдя путь $l\ll h$.

И здесь, и в цитированной нашей статье использованы по существу одни и те же предположения. Все различие лишь в соотношении между $\bar{J}$ и $\overset{-+}{J}$. Использованное там предположение, что $\bar{J}\approx\overset{-+}{J}$, эквивалентно предположению $l\approx h$. Здесь, наоборот, предполагалось, что $l\ll h$, что эквивалентно $|\bar{J}|\ll|\overset{-+}{J}|$. Там получилось уравнение (1), здесь — качественно от него отличное (9). Ошибкой рассуждения Шмидта и Тайлора является то, что они хотя и предполагают, что вихри, не выходя за пределы неустойчивого слоя, смешиваются с окружающей средой, обмениваясь с ней энергией, но не учитывают этого теплообмена в своих уравнениях.

Астрономическая обсерватория
Ленинградского государственного университета

Поступило
22 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft, Hamburg (1925). [2] Taylor, Proc. R. Soc. A., 124 (1929). [3] А. И. Лебединский, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [4] Брент, Динамическая и физическая метеорология, § 127 (1935).