Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 3

ГЕОФИЗИКА

В. В. ШУЛЕЙКИН, член-корреспондент Академии Наук СССР

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ С БОЛЬШИМ ПЕРИОДОМ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ

В работах о термобарических сейшах в атмосфере ([1],[2],[3]) нами было обнаружено, что узловая линия таких сейш непрерывно вращается в поле тепловых потоков и притом вращается против часовой стрелки (в северном полушарии), с периодом, равным периоду самих сейш во вращающейся системе.

Как известно, плоскость качания маятника Фуко вращается в направлении противоположном, и поворот плоскости качания совершается за время, весьма далекое от периода качания,—за время около суток (зависящее от широты места). И тот и другой тип колебаний, отмеченных здесь, происходит под действием одного и того же поля: поля кориолисовой силы. Поэтому будет небезынтересным разобраться достаточно подробно в формальных причинах и в физическом смысле подобных резких различий.

Представим себе некоторую материальную частицу с массой, равной единице, колеблющуюся под действием силы, которая стремится вернуть ее в исходное положение.

Пусть эта сила дает проекции на координатные оси, выражаемые в самой общей форме, через смещения частицы x и y и через ту угловую частоту колебаний $\sigma = \frac{2\pi}{T}$, которая была бы при отсутствии вращения системы, именно, проекции $\sigma^2 x$ и $\sigma^2 y$.

Проекции кориолисовой силы будут зависеть от величины $\bar{\omega} = \omega \cdot \sin \varphi$ проекции угловой скорости вращения Земли на вертикаль и от проекций скорости частицы: $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Наконец, проекции силы инерции исследуемой частицы будут просто равны соответственно: $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$.

Дифференциальные уравнения движения частицы будут:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \sigma^2 x - 2\bar{\omega}\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + \sigma^2 y + 2\bar{\omega}\dot{x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Проинтегрировав эту систему уравнений, легко получить закон изменения смещений x и y во времени:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{a_1 + a_2}(a_2 \cos a_1 t + a_1 \cos a_2 t), \\ y &= \frac{x_0}{a_1 + a_2}(a_2 \sin a_1 t - a_1 \sin a_2 t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь для краткости обозначено:

$$a_1=\sqrt{\sigma^2+\bar{\omega}^2}-\bar{\omega}, \quad a_2=\sqrt{\sigma^2+\bar{\omega}^2}+\bar{\omega}. \tag{3}$$

В случае колебаний с такими периодами, как период маятника Фуко, необходимо помнить, что

$$\sigma \gg \bar{\omega},$$

а, следовательно, на основании (3): $a_1 \approx a_2$. Но тогда применительно к такому типу колебаний уравнения (2) можно будет значительно упростить. Именно, окажется, что

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos \sigma t \cos \bar{\omega} t, \\ y &= -x_0 \cos \sigma t \sin \bar{\omega} t, \\ \frac{y}{x} &= -\operatorname{tg} \bar{\omega} t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эта система уравнений, как легко видеть, описывает сложное движение, которое раскладывается на колебание вдоль некоторой прямой (с тангенсом угла наклона к оси x, равным $\frac{y}{x}$) и на вращение самой отмеченной прямой около начала координат с угловой скоростью $\bar{\omega}$, т. е. с угловой скоростью, которая задается самой вращающейся системой.

Направление вращения здесь совпадает с направлением вращения часовой стрелки (в северном полушарии).

Перейдем к исследованию случая, который непосредственно нас интересует в связи с теорией термобарических сейш. В данном случае, как легко видеть, $\sigma < \bar{\omega}$, ибо период сейш значительно превышает период обращения Земли вокруг ее оси. Но тогда на основании (3) придется заключить, что

$$a_2 \gg a_1.$$

Другими словами, в сложном движении, описанном уравнениями (2), основу движения составляет та слагающая, которой соответствуют п е р в ы е члены в круглых скобках. Но нетрудно видеть, что эти первые члены описывают вращение против часовой стрелки, происходящее с угловой скоростью a_1, значительно меньшей, чем угловая скорость вращения координатной системы. На это основное движение налагается другое, описываемое в т о р ы м и членами в круглых скобках (2). Эта вторая составляющая также характеризует некоторое вращение, но со значительно меньшим радиусом орбиты, с направлением п о стрелке часов (в северном полушарии) и с угловой скоростью, близкой к у д в о е н н о й угловой скорости вращения самой координатной системы.

Доведем анализ до конкретных чисел.

Пусть период сейш на вращающейся Земле равен в о с ь м и суткам. Тогда, очевидно, придется положить:

$$\frac{a_1}{\bar{\omega}}=\frac{1}{8},$$

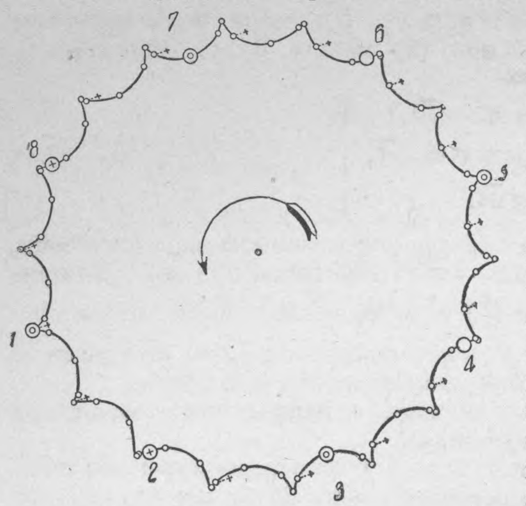
а, стало быть, на основании (3)

$$\frac{\sigma}{\bar{\omega}}=\sqrt{\left(1+\frac{a_1}{\bar{\omega}}\right)^2-1}=0{,}52.$$

На основании той же системы (3), как легко убедиться, $\frac{a_2}{a_1} \approx 17$. Другими словами, движение частицы здесь можно рассматривать как движение с п у т н и к а некоторой «планеты», причем сама «планета» движется п р о т и в часовой стрелки по орбите, в 17 раз превосходящей орбиту спутника, вокруг «тяготеющего центра» (вокруг исходного положения точки), а спутник вдобавок движется вокруг «планеты» по часовой стрелке и с периодом обращения, в 17 раз меньшим, чем период обращения «планеты».

На фигуре крестиками отмечены 17 последовательных положений воображаемой «планеты», которые разделены промежутками времени, равными периоду обращения спутника. Положения самого спутника отмечены кружками. Кроме этих положений спутника на фигуре нанесены также и промежуточные: в общей сложности отмечено 68 положений, через которые проведена плавная кривая—т р а е к т о р и я исследуемой частицы. Большими кружками отмечены пункты траектории, в которых частица оказывается через целое число с у т о к. Порядковые номера суток обозначены цифрами.

Итак, в основном, исследуемая частица за восемь суток обходит вокруг положения покоя, двигаясь п р о т и в часовой стрелки. Добавочная составляющая движения создает лишь своеобразные зубцы на траектории, причем число этих зубцов, как нетрудно видеть, должно равняться $17+1=18$, ибо за время 17 оборотов спутника сама воображаемая «планета» совершает тоже один оборот (в противоположном направлении).



Сопоставляя полученную картину с картиной колебаний маятника Фуко, нетрудно найти ф и з и ч е с к у ю причину с м е н ы направления основного поворота колеблющейся частицы.

В самом деле, ведь в обоих случаях по принципу Даламбера сумма всех сил должна равняться нулю. Что касается случая Фуко, то там угловая скорость поворота системы сравнительно велика, а потому соответственно б о л ь ш а я центробежная сила должна быть уравновешена совокупно и силой, стремящейся вернуть частицу в исходное положение, и силой Кориолиса, которая обязана поэтому действовать в ту же сторону. Следовательно, в случае Фуко вращение частицы должно происходить п о часовой стрелке (в северном полушарии).

Напротив, в случае чрезвычайно м е д л е н н ы х колебаний (характерных для термобарических сейш) центробежная сила, возникающая при о б х о д е вокруг положения покоя, чрезвычайно м а л а. Для динамического равновесия (по Даламберу) необходимо теперь, чтобы сила Кориолиса была направлена с о г л а с н о с ц е н т р о б е ж н о й: только тогда совокупность этих двух сил может уравновесить силу, стремящуюся вернуть частицу в положение покоя.

Но если это так, то о с н о в н о е движение частицы вокруг положения покоя должно теперь происходить п р о т и в часовой стрелки.

Черноморская гидрофизическая станция
Академии Наук СССР
Симеиз. Кацивели

Поступило
11 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Ш у л е й к и н, ДАН, XXII, № 7 (1939). [2] В. В. Ш у л е й к и н, ДАН, XXVIII, № 4 (1940). [3] В. В. Ш у л е й к и н, ДАН, XXVIII, № 4 (1940).