Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 5—6

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IX 1940)

Впервые N. Wiener [1], а затем R. Cameron [2], H. Pitt [3] и N. Wiener и H. Pitt [4] доказали ряд интересных теорем, касающихся абсолютно сходящихся тригонометрических сумм и интегралов Фурье. Сравнительно недавно И. М. Гельфанд, отправляясь от разработанной им теории нормированных колец [5], предложил очень простой и вместе с тем глубокий метод для доказательства теорем такого типа [6].

В настоящей заметке мы строим одно кольцо, до сих пор не изучавшееся, и доказываем для него, используя метод И. М. Гельфанда [6], теоремы (см. теоремы 3, 4), примыкающие к результатам цитированных авторов. Эти теоремы позволят нам в следующих заметках обобщить первоначальные классические теоремы N. Wiener'а [1] на случай почти-периодических функций на произвольной топологической группе и установить ряд новых свойств топологических групп с достаточным количеством почти-периодических функций.

§ 1. Пусть Q — некоторое топологическое множество. Как известно, функция $\Phi(s, t)$ от двух произвольных точек $s \in Q$ и $t \in Q$, принимающая вещественные или комплексные значения, называется *эрмитовым ядром на* Q, если $\Phi(s, t) = \overline{\Phi(t, s)}$ $(s, t \in Q)$. Если, кроме того, при любых $s_1 \in Q, \ldots, s_n \in Q$ и комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Phi(s_j, s_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0, \tag{1}$$

то $\Phi(s, t)$ называется *эрмитово-положительным* (э. п.) ядром на Q.

Обозначим через P_Q совокупность всех ограниченных непрерывных э. п. ядер $\Phi(s, t)$, а через R_Q линейную комплексную оболочку множества P_Q. Очевидно, некоторая функция $\Phi(s, t)$ принадлежит R_Q, если каждая из ее эрмитовых компонент

$$\Phi^+(s, t) = \frac{1}{2}\{\Phi(s, t) + \overline{\Phi(t, s)}\}, \quad \Phi^-(s, t) = \frac{1}{2i}\{\Phi(s, t) - \overline{\Phi(t, s)}\}$$

представима в виде разности двух функций из P_Q.

Так как в силу известной алгебраической теоремы Шура произведение двух функций из P_Q снова принадлежит P_Q, то R_Q — кольцо. Введем в кольце R_Q норму $\|\Phi\|$.

Если $\Phi \in P_Q$, то положим

$$\|\Phi\| = \sup_{s \in Q} \Phi(s, s); \tag{2}$$

если же Φ — произвольное эрмитово ядро из R_Q, то положим

$$\|\Phi\| = \inf\{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|\}, \tag{3}$$

где infimum распространяется на любые пары Φ', $\Phi'' \in P_Q$ такие, что $\Phi = \Phi' - \Phi''$.

Если $\Phi \in P_Q$, то, как следует из рассмотрения неравенства (1) при $n = 1, 2$, имеем $\Phi(s, s) \geqslant 0$, $|\Phi(s, t)|^2 \leqslant \Phi(s, s)\,\Phi \cdot (t, t)$ $(s, t \in Q)$. Отсюда не трудно заключить, что если $\Phi \in R_Q$ — эрмитово ядро, то

$$|\Phi(s, t)| \leqslant \|\Phi\|. \tag{4}$$

Для произвольного ядра $\Phi \in R$ положим

$$\|\Phi\| = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \|\Phi^+ \cos\alpha + \Phi^- \sin\alpha\|, \tag{5}$$

где Φ^+ и Φ^- — эрмитовы компоненты ядра Φ. Легко видеть, что определенная таким образом норма обладает следующими свойствами: 1° $\|\Phi\| > 0$, если $\Phi \not\equiv 0$; 2° $\|\lambda\Phi\| = |\lambda|\,\|\Phi\|$ (λ — комплексное число); 3° $\|\Phi + \Psi\| \leqslant \|\Phi\| + \|\Psi\|$ $(\Phi, \Psi \in R_Q)$ и, кроме того,

$$4^\circ \ \|\Phi\Psi\| \leqslant \sqrt{2}\,\|\Phi\| \cdot \|\Psi\| \qquad (\Phi, \Psi \in R_Q).$$

Имеет место

Теорема 1. *Кольцо R_Q полно по введенной норме $\|\Phi\|$**.

§ 2. Обозначим через C_s (соответственно C_t) совокупности всех функций из R_Q, зависящих только от s (соответственно только от t). Покажем, что C_s, равно как и C_t, состоит из всех ограниченных непрерывных функций на Q. Действительно, пусть, например, $\varphi(s)$ $(s \in Q)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция. Полагая $\varphi(s, t) \equiv \varphi(s)$ $(s, t \in Q)$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^+(s, t) &= \frac{1}{2}\{\varphi(s) + \overline{\varphi(t)}\} = \frac{[\mu + \varphi(s)][\mu + \overline{\varphi(t)}]}{4\mu} - \frac{[\mu - \varphi(s)][\mu - \overline{\varphi(t)}]}{4\mu},\\
\varphi^-(s, t) &= \frac{1}{2i}\{\varphi(s) - \overline{\varphi(t)}\} = \frac{[\varphi(s) + \mu i][\overline{\varphi(t)} - \mu i)}{4\mu} - \frac{[\varphi(s) - \mu i][\overline{\varphi(t)} + \mu i]}{4\mu}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Так как при $\mu > 0$ каждая из дробей, будучи вида $\psi(s)\overline{\psi(t)}$, принадлежит к P_Q, то $\varphi(s, t) \equiv \varphi(s)$ принадлежит кольцу R_Q, что и требовалось доказать. Заметим, что из (10) вытекает также неравенство

$$\|\varphi\| \leqslant \|\varphi^+(s, t)\| + \|\varphi^-(s, t)\| \leqslant \frac{[\mu^2 + \sup|\varphi(s)|^2}{\mu}.$$

Полагая здесь $\mu = \sup|\varphi(s)|$, найдем $\|\varphi(s)\| \leqslant 2\sup_{s \in Q}|\varphi(s)|$. Так как, с другой стороны, в силу (4) и (5)

$$\begin{aligned}
|\varphi(s)| = |\varphi^+(s, t) + i\varphi^-(s, t)| \leqslant |\varphi^+(s, t)| + \\
+ |\varphi^-(s, t)| \leqslant \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\| \leqslant 2\|\varphi\|,
\end{aligned}$$

то окончательно

$$\frac{1}{2}\sup_{s \in Q}|\varphi(s)| \leqslant \|\varphi\| \leqslant 4\sup_{s \in Q}|\varphi(s)|. \tag{11}$$

Следовательно, в C_s норма $\|\varphi\|$ топологически эквивалентна равномерной норме $\|\varphi\|_u = \sup|\varphi(s)|$.

§ 3. Начиная с этого параграфа, мы будем всегда предполагать (если только не оговорено противное), что Q — компактное метрическое множество.

В этом случае всегда существует линейный функционал $M\{\varphi\}$, определенный на всех $\varphi \in C_t$ и удовлетворяющий условиям:

$$M\{1\} = 1, \quad M\{\varphi\} > 0, \text{ если } \varphi(t) \geqslant, \ \not\equiv 0 \ (t \in Q). \tag{12}$$

---

* Доказательство теоремы из-за недостатка места опускается.

Чтобы построить такой функционал, достаточно взять какую-либо плотную в Q последовательность $\{t_j\}$ и произвольно последовательность положительных чисел $m_j\,(j=1, 2, \ldots)$ с суммой, равной 1, и затем положить

$$M\{\varphi\}=\sum_{j=1}^{\infty} m_j\,\varphi(t_j).$$

Пусть $M\{\varphi\}$ — какой-либо линейный функционал в C_t, удовлетворяющий условиям (12), а $\Phi(s, t)$ — произвольное непрерывное эрмитово ядро на Q. Тогда к уравнению

$$\varphi(s)=\lambda \underset{t}{M}\{\Phi(s, t)\,\varphi(t)\} \tag{13}$$

приложима теория Гильберта-Шмидта обыкновенных интегральных уравнений с эрмитовым ядром. В частности, если $\Phi(s, t)\in P_Q$, то имеет место теорема Мерсера, т. е. ядро $\Phi(s, t)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$\Phi(s, t)=\sum \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}, \tag{14}$$

где $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная * система фундаментальных функций, а $\{\lambda_k\}$ $(\lambda_k>0,\ k=1, 2, \ldots)$ — соответствующая последовательность характеристических чисел уравнения (13).

Из (14) вытекает, что

$$\sum \frac{1}{\lambda_k}=\underset{t}{M}\{\Phi(t, t)\leqslant \sup_{t\in Q}\Phi(t, t)\}=\|\Phi\|.$$

Оказывается, что для произвольного эрмитова ядра $\Phi(s, t)\in R_Q$ имеет место неравенство

$$\sum \frac{1}{|\lambda_k|}\leqslant \|\Phi\|, \tag{15}$$

где $\{\lambda_k\}$ — полная последовательность характеристических чисел уравнения (13). Действительно, если $\Phi=\Phi^{(1)}-\Phi^{(2)}$, где $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\in P_Q$, то при любой функции $\varphi\in C_t$ имеем:

$$\begin{aligned}-\underset{s}{M}\underset{t}{M}\{\Phi^{(2)}(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\}&\leqslant \underset{s}{M}\underset{t}{M}\{\Phi(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\}\leqslant\\ &\leqslant \underset{s}{M}\underset{t}{M}\{\Phi^{(1)}(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Пусть $\rho_1\leqslant\rho_2\leqslant\ldots$ — все положительные, а $\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant\ldots$ — все отрицательные характеристические числа ядра $\Phi(s, t)$; пусть, кроме того, $\lambda_1^{(i)}\leqslant\lambda_2^{(i)}\leqslant\ldots$ — характеристические числа ядра $\Phi^{(i)}(s, t)$ $(i=1, 2)$. Тогда из (16) следует, что

$$\rho_j\geqslant\lambda_j^{(1)},\quad -\tau_j=|\tau_j|\geqslant\lambda_j^{(2)}\ (j=1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\sum\frac{1}{|\lambda_j|}=\sum\frac{1}{\rho_j}+\sum\frac{1}{|\tau_j|}\leqslant\sum\frac{1}{\lambda_j^{(1)}}+\sum\frac{1}{\lambda_j^{(2)}}\leqslant\|\Phi^{(1)}\|+\|\Phi^{(2)}\|,$$

что и доказывает (15).

§ 4. В этом параграфе нам придется многократно опираться на результаты И. М. Гельфанда по теории нормированных колец.

Теорема 2. *Всякий максимальный идеал J кольца R_Q состоит из всех функций из R_Q, обращающихся в нуль в некоторой точке $s=s_0$, $t=t_0$.*

Доказательство. По теореме Гельфанда [см. (5), теорема 3] кольцо вычетов R_Q/J есть тело комплексных чисел. Пусть $\Phi \in R_Q$; обозначим через $F(\Phi)$ то комплексное число, которое соответствует Φ при гомоморфизме $R_Q \sim R_Q/J$. Тогда $F(\Phi)$ $(\Phi \in R_Q)$ — линейный мультипликативный функционал в R_Q.

Рассмотрим подкольцо $C_s \subset R_Q$. Так как C_s есть кольцо всех непрерывных функций $\varphi(s)$ $(s \in Q)$, то в нем по теореме Stone'a (7) мультипликативный линейный функционал имеет вид: $F(\varphi) = \varphi(s_0)$ $(\varphi \in C_s)$, где $s_0 \in Q$ — некоторая фиксированная точка. Аналогично в $C_t : F(\varphi) = \varphi(t_0)$ $(\varphi \in C_t)$, где $t_0 \in Q$ — некоторая фиксированная точка.

Пусть теперь $\Phi(s, t)$ — произвольная функция из P_Q. Тогда имеет место разложение (14), в силу которого при $n \to \infty$

$$\left\| \Phi(s, t) - \sum_1^n \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right\| = \sup_{s \in Q} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k} \to 0.$$

Отсюда, так как $F(\Phi)$ — непрерывный функционал,

$$F(\Phi) = \lim_{n\to\infty} F\left[\sum_1^n \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \frac{F[\varphi_k(s)] \cdot F[\overline{\varphi_k(t)}]}{\lambda_k} =$$

$$= \lim \sum_1^n \frac{\varphi_k(s_0)\overline{\varphi_k(t_0)}}{\lambda_k} = \Phi(s_0, t_0).$$

Так как R_Q есть линейная оболочка P_Q, то при любом $\Phi \in R_Q : F(\Phi) = \Phi(s_0, t_0)$. Припоминая, что J есть гиперплоскость, определяемая уравнением $F(\Phi) = 0$, приходим к теореме 3.

Теорема 3. *Если $\Phi \in R_Q$, то и $f(\Phi) \in R_Q$, где $f(z)$ — любая аналитическая функция, голоморфная на множестве значений $z = \Phi(s, t)$ $(s, t \in Q)$.*

Доказательство*. Рассмотрим сперва тот частный случай теоремы, когда $F(z) = \frac{1}{z}$. Итак, пусть $\Phi(s, t) \in R_Q$ и $\Phi(s, t) \neq 0$ при любых $s, t \in Q$; докажем, что $1/\Phi \in R_Q$. Допустим противное и рассмотрим совокупность J_0 всех произведений $\Phi(s, t)\,\Psi(s, t)$, где Ψ пробегает все R_Q $(J_0 = \Phi \cdot R_Q)$. Так как $1/\Phi \overline{\in} R_Q$, то J_0 — некоторый нетривиальный идеал $(J_0 \neq R_Q)$. Но всякий нетривиальный идеал заключается в некотором максимальном идеале [см. (5), теорему 2]. Следовательно, по теореме 2 все функции из J_0 обращаются в нуль в некоторой точке $s = s_0$, $t = t_0$. Так как $\Phi(s, t) \cdot 1 \in J_0$, то и $\Phi(s_0, t_0) = 0$. Мы пришли к противоречию.

Вернемся теперь к общему случаю теоремы 2. Так как функция $f(z)$ — регулярна на замкнутом множестве E значений $z = \Phi(s, t)$ $(s, t \in Q)$, то найдется такой сложный спрямляемый контур Γ, который лежит целиком в области регулярности и который содержит внутри себя множество E. Тогда по теореме Коши

$$f(\Phi(s, t)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \Phi(s, t)} d\zeta \quad (s, t \in Q).$$

* Излагаемый ниже замечательный способ доказательства теоремы 3 принадлежит И. М. Гельфанду. Первая часть рассуждения заимствована из его работы (6), вторая часть была сообщена автору И. М. Гельфандом через Б. Я. Левина.

По доказанному ранее при $\zeta \in \Gamma$ функция $\Psi_\zeta = [\zeta - \Phi]^{-1} \in R_Q$. Легко видеть, что Ψ_ζ непрерывно по норме от $\zeta \in \Gamma$, т. е.

$$\| \Psi_\zeta - \Psi_{\zeta_n} \| \longrightarrow 0 \text{ при } \zeta_n \longrightarrow \zeta.$$

Но тогда, рассматривая Ψ_ζ, как абстрактную функцию от $\zeta \in \Gamma$ со значениями из пространства R_Q, мы без труда докажем, что в пространстве R_Q существует интеграл

$$X = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \Psi_\zeta f(\zeta)\, d\zeta.$$

Так как в силу (4) сходимость по норме последовательности элементов из R_Q влечет их сходимость как функций от s и t, то $X = f(\Phi(s, t))$. Теорема доказана.

§ 5. Теперь нам понадобится следующая

Лемма*. *Пусть B — некоторое хаусдорфово бикомпактное множество, а R — некоторое подкольцо кольца всех непрерывных функций на B, обладающее следующими свойствами:*

1° *если $\varphi \in R$, то и $\bar{\varphi} \in R$,*

2° *если $\varphi \in R$ и $\varphi(s) > 0$ $(s \in B)$, то $\frac{1}{\varphi} \in R$,*

3° *для каждой точки $s_0 \in B$ и любой ее окрестности U_0 найдется функция $\varphi \in R$ такая, что $\varphi(s_0) \neq 0$ и $\varphi(s) = 0$ при $s \bar{\in} U$.*

Тогда для того, чтобы некоторая функция $\psi(s)$ $(s \in B)$ принадлежала R, достаточно, чтобы она «локально принадлежала R», т. е. чтобы для всякой точки $s_0 \in B$ нашлась такая ее окрестность U_0 и функция $\varphi_0 \in R$, что $\psi(s) = \varphi_0(s)$ при $s \in U_0$.

Доказательство этой леммы мы приведем в следующей заметке.

Теорема 4. *Для того чтобы некоторое ядро $\Phi(s, t)$ $(s, t \in Q)$ принадлежало кольцу R_Q, достаточно, чтобы для каждой точки $(s_0, t_0) \in Q^{(2)}$ $(Q^{(2)} = Q \times Q$ — топологический квадрат $Q)$ нашлась такая окрестность $U \subset Q^{(2)}$ этой точки и ядро $\Phi_0 \in R$, чтобы $\Phi(s, t) = \Phi_0(s, t)$ при $(s, t) \in U$.*

Доказательство. Действительно, R является некоторым кольцом непрерывных функций на компактном метрическом множестве $Q^{(2)}$ и для этого кольца выполняются все 3 условия предыдущей леммы, а именно: условие 1° в силу того, что если $\Phi \in P_Q$, то и $\bar{\Phi} \in P_Q$; условие 2° в силу теоремы 3 и условие 3° в силу следующих соображений. Какова бы ни была точка $(s_0, t_0) \in Q^{(2)}$ и ее окрестность $U \subset Q^{(2)}$, всегда найдутся функции $\varphi(s) \in C_s$ и $\in \varphi(t)\, C_t$ такие, что $\varphi(s_0) = 1$, $\varphi(s) = 0$ при $s \bar{\in} UQ_s$, и аналогично $\psi(t_0) = 1$, $\psi(t) = 0$ при $t \bar{\in} UQ_t$. Но тогда, полагая $\Phi(s, t) = \varphi(s)\psi(t)$, будем иметь $\Phi(s_0, t_0) = 1$, $\Phi(s, t) = 0$ при $(s, t) \bar{\in} U$. Теорема 4 доказана.

Институт математики
Академии Наук УССР

Поступило
9 IX 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener, Annals of Math., **33**, 1—100 (1932). [2] R. H. Cameron, Duke Math. Journal, **3**, 662 (1937). [3] H. R. Pitt, Journ. of Math. and Phys., **4**, 420 (1938). [4] N. Wiener a. H. R. Pitt, Duke Math. Journal, **4**, 420 (1938). [5] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [6] И. М. Гельфанд, ДАН, XXV, № 7 (1939). [7] M. H. Stone, Trans. of Amer. Math. Soc., **41**, 375—481 (1937).

---

* От Д. А. Райкова автор узнал, что одновременно с ним аналогичное предложение было найдено в Москве Г. Е. Шиловым.