Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. НАЙМАРК

ДЕФЕКТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ.

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 IV 1940)

В первой части этой статьи [1] мною было показано, как определить дефектные подпространства прямого произведения симметрических операторов* в том случае, когда один из них — самосопряженный оператор. Настоящая вторая часть посвящена решению этой задачи для любых двух симметрических операторов. Оказывается, что общий случай легко сводится к случаю, уже рассмотренному в ч. I.

Лемма. *Пусть A_1, A_2, A_1', A_2' — замкнутые линейные операторы в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$ с областями определения, плотными в этих пространствах, и пусть $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_2'$. Если тогда A_1', A_2' — расширения второго рода** операторов A_1, A_2, то*

$$\mathfrak{D}(A_1 \times A_2') \cdot \mathfrak{D}(A_1' \times A_2) = \mathfrak{D}(A_1 \times A_2). \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{D}(A_1 \times A_2) \subset \mathfrak{D}(A_1 \times A_2') \cdot \mathfrak{D}(A_1' \times A_2)$, поэтому нужно только доказать, что $\mathfrak{D}(A_1 \times A_2) \supset \mathfrak{D}(A_1' \times A_2) \cdot \mathfrak{D}(A_1 \times A_2')$. Обозначим через E_2 оператор проектирования в $\mathfrak{H}_2'$ на $\mathfrak{H}_2$ и определим оператор B_2 в $\mathfrak{H}_2$ равенством $B_2 E_2 g = E_2 A_2'^{*} g$ для $g \in \mathfrak{D}(A_2'^{*})$. Согласно теореме 1 в [3]

$$\widetilde{B}_2 = A_2^{*}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\Phi \in \mathfrak{D}(A_1' \times A_2) \cdot \mathfrak{D}(A_1 \times A_2')$; тогда $\Phi \in (\mathfrak{H}_2' \times \mathfrak{H}_2)(\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2') = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Положим $\Psi = (A_1 \times A_2')\Phi$; тогда $\Psi = (A_1' \times A_2')\Phi = (A_1' \times A_2)\Phi$. Поэтому также $\Psi \in (\mathfrak{H}_1' \times \mathfrak{H}_2)(\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_2') = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, так что, в частности, $E_2^{(2)}\Phi = \Phi$, $E_2^{(2)}\Psi = \Psi$. Отсюда для любых $f \in \mathfrak{D}(A_1^{*})$, $g \in \mathfrak{D}(A_2'^{*})$

$$(\Psi, f \times E_2 g) = (E_2^{(2)}\Psi, f \times g) = (\Psi, f \times g) = (\Phi, A_1^{*} f \times A_2'^{*} g) =$$
$$= (E_2^{(2)}\Phi, A_1^{*} f \times A_2'^{*} g) = (\Phi, A_1^{*} f \times E_2 A_2'^{*} g) = (\Phi, A_1^{*} f \times B_2 E_2 g).$$

* По поводу терминологии см. [1], а также [2, 3].

** A_1' в $\mathfrak{H}_1'$ называется расширением второго рода оператора A_1 в $\mathfrak{H}_1$ ($\subset \mathfrak{H}_1'$), если $\mathfrak{D}(A_1') \cdot \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{D}(A_1)$ и $A_1' = A_1$ в $\mathfrak{D}(A_1)$. При этом $\mathfrak{D}(A)$ обозначает область определения оператора A. Подробнее о расширениях второго рода см. [3].

Пользуясь (2), заключаем отсюда, что для любого $\Phi_1 \in \mathfrak{D}(A_1^* \times A_2^*)$

$$(\Psi, \Phi_1) = (\Phi, (A_1^* \times A_2^*)\Phi_1),$$

следовательно, $\Phi \in \mathfrak{D}((A_1^* \times A_2^*)^*) = \mathfrak{D}(A_1 \times A_2)$.

Пусть теперь H — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В дальнейшем через $\mathfrak{M}_\lambda(H)$ мы будем обозначать совокупность всех векторов f, удовлетворяющих соотношению $H^* f = \lambda f$, $J(\lambda) \neq 0$, а через $F_\lambda(H)$ — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}_\lambda(H)$.

Теорема. *Пусть H_1, H_2 — замкнутые симметрические операторы в $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, а H_1', H_2' в $\mathfrak{H}_1', \mathfrak{H}_2'$ — какие-либо самосопряженные расширения второго рода операторов H_1, H_2. Пусть, далее, E_1, E_2 — операторы проектирования в $\mathfrak{H}_1', \mathfrak{H}_2'$ на $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$; тогда для любого недействительного* λ*

$$\mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2) = \overline{E_1^{(1)}\mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2) + E_2^{(2)}\mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2')}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2)$; тогда $(H_1' \times H_2)^* \Phi = \lambda \Phi$. Очевидно, $H_1' \times H_2$ совпадает с $H_1 \times H_2$ в области определения последнего. Отсюда, повторяя рассуждение, приведенное в начале доказательства теоремы 1 в [3], заключаем, что

$$E_1^{(1)}(H_1' \times H_2)^* \Phi = (H_1 \times H_2)^* E_1^{(1)} \Phi.$$

Поэтому

$$(H_1 \times H_2)^* E_1^{(1)} \Phi = \lambda E_1^{(1)} \Phi, \quad E_1^{(1)} \mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2) \subset \mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2).$$

Аналогично $E_2^{(2)}\mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2') \subset \mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2)$, так что и

$$\overline{E_1^{(1)}\mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2) + E_2^{(2)}\mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2')} \subset \mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2). \tag{4}$$

Предположим теперь, что левая часть в (4) является правильной частью правой. Тогда существует отличный от нуля элемент $\Phi \in \mathfrak{M}_\lambda(H_1 \times H_2)$ и ортогональный к левой части (4). В частности, для любого $\Psi \in \mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2)$

$$(\Phi, \Psi) = (E_1^{(1)}\Phi, \Psi) = (\Phi, E_1^{(1)}\Psi) = 0,$$

так что $\Phi \perp \mathfrak{M}_\lambda(H_1' \times H_2)$. Поэтому Φ представим в виде

$$\Phi = (H_1' \times H_2) F_1 - \bar{\lambda} F_1, \quad F_1 \in \mathfrak{D}(H_1' \times H_2);$$

аналогично

$$\Phi = (H_1 \times H_2') F_2 - \bar{\lambda} F_2, \quad F_2 \in \mathfrak{D}(H_1 \times H_2').$$

Но тогда $\Phi = (H_1' \times H_2') F_1 - \bar{\lambda} F_1 = (H_1' \times H_2') F_2 - \bar{\lambda} F_2$, следовательно,

$$((H_1' \times H_2')(F_1 - F_2),\ F_1 - F_2) - \bar{\lambda}(F_1 - F_2,\ F_1 - F_2) = 0.$$

Так как $H_1' \times H_2'$ — самосопряженный оператор, то отсюда следует $F_1 = F_2$, так что $F_1 \in \mathfrak{D}(H_1' \times H_2) \cdot \mathfrak{D}(H_1 \times H_2')$. Согласно лемме, отсюда следует, что $F_1 \in \mathfrak{D}(H_1 \times H_2)$; поэтому

$$\Phi \perp (H_1 \times H_2) F_1 - \bar{\lambda} F_1 = \Phi, \quad \Phi = 0.$$

---

* $A\mathfrak{M}$ обозначает область изменения A на $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ — замыкание $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ — совокупность всех элементов вида $f + g$, $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{N}$.

Полученное противоречие показывает, что левая часть в (4) не может быть правильной частью правой, т. е. (3) имеет место.

Теперь, для нахождения дефектных подпространств $H_1 \times H_2$ остается только применить основную теорему в [1]. Согласно этой последней, $\mathfrak{M}_\lambda (H_1' \times H_2)$ и $\mathfrak{M}_\lambda (H_1 \times H_2')$, $J(\lambda) \neq 0$ состоят из элементов Φ' и Ψ', представимых в виде

$$\Phi' = \left(\int\limits_{-\infty}^{-0} + \int\limits_{+0}^{+\infty} \right) dE_1'(\mu) \times F_{\frac{\lambda}{\mu}}(H_1)\,\Phi, \quad \Phi \in \mathfrak{H}_1' \times \mathfrak{H}_2,$$

$$\Psi' = \left(\int\limits_{-\infty}^{-0} + \int\limits_{+0}^{+\infty} \right) F_{\frac{\lambda}{\mu}}(H_1) \times dE_2'(\mu)\,\Psi, \quad \Psi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2',$$

где $E_1'(\mu)$, $E_2'(\mu)$ — спектральные функции H_1' и H_2'. Отсюда $\mathfrak{M}_\lambda (H_1 \times H_2)$ состоит из элементов вида

$$E_1^{(1)} \left(\int\limits_{-\infty}^{-0} + \int\limits_{+0}^{+\infty} \right) dE_1'(\mu) \times F_{\frac{\lambda}{\mu}}(H_2)\,\Phi + E_2^{(2)} \left(\int\limits_{-\infty}^{-0} + \int\limits_{+0}^{+\infty} \right) F_{\frac{\lambda}{\mu}}(H_1) \times dE_2'(\mu)\,\Psi,$$

$$\Phi \in \mathfrak{H}_1' \times \mathfrak{H}_2. \quad \Psi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2'$$

и их сильных пределов.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
28 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Наймарк, Изв. Акад. Наук, № 3 (1939). [2] М. Наймарк, Изв. Акад. Наук, № 1 (1939). [3] М. Наймарк, Изв. Акад. Наук, № 1 (1940).