Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. НАЙМАРК

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «О КВАДРАТЕ ЗАМКНУТОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА»*

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 IV 1940)

Как мною уже было показано ([1]), существуют такие замкнутые симметрические операторы, квадрат которых имеет область определения, неплотную в рассматриваемом гильбертовом пространстве. Однако более точное исследование показывает, что существуют также замкнутые симметрические операторы, квадрат которых определен только на нулевом элементе пространства.

Для получения этого результата нам придется ввести в рассмотрение многозначные операторы и установить для них некоторые, весьма простые соотношения.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольное гильбертово пространство. Совокупность пар $\{f, g\}$, $f, g \in \mathfrak{H}$ также образует гильбертово пространство, если определить основные операции следующим образом:

1) $\alpha\{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\}$, α — скаляр;
2) $\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\}$;
3) $(\{f, g\}, \{f_1, g_1\}) = (f, f_2) + (g, g_1)$.

Это последнее пространство обозначим через $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$.

Всякое подмножество $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ порождает (вообще многозначный) оператор A следующим образом: если $\{f, g\} \in \mathfrak{S}$, то f входит в область определения A (эту последнюю будем обозначать через $\mathfrak{D}(A)$) и $g = Af$. Множество $\mathfrak{S}$ будем называть г р а ф и к о м A и обозначать через $\mathfrak{B}(A)$. Оператор A назовем л и н е й н ы м, если $\mathfrak{B}(A)$ линейно, и з а м к н у т ы м, если $\mathfrak{B}(A)$ замкнуто в смысле метрики в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$.

Оператор A назовем р а с ш и р е н и е м B ($A \supset B$), если $\mathfrak{B}(A) \supset \mathfrak{B}(B)$. Всякий оператор A имеет (вообще многозначное) минимальное линейное замкнутое расширение $\tilde{A}$, которое мы будем называть з а м ы к а н и е м A. Очевидно, $\mathfrak{B}(\tilde{A}) = \overline{\mathfrak{B}(A)}$, где $\overline{\mathfrak{S}}$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $\mathfrak{S}$. Очевидно далее, что из $A \supset B$ следует $\tilde{A} \supset \tilde{B}$.

Определим теперь оператор U в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ равенством

$$U\{f, g\} = \{g, -f\}$$

и введем оператор A^*, полагая

$$\mathfrak{B}(A^*) = (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}) \ominus U\mathfrak{B}(A);$$

---

* См. ([1]).

A^* будем называть **сопряженным** к A оператором. Из самого определения следует, что A^* линеен и замкнут; далее $A \supset B$ влечет за собой $A^* \subset B^*$. Наконец, в силу $U^2 = -1$, $\mathfrak{B}(A^{**}) = \overline{\mathfrak{B}(A)}$, т. е. $A^{**} = \tilde{A}$. Пусть теперь A — произвольный линейный оператор в $\mathfrak{H}$. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{M}(A)$ всех $g \in \mathfrak{H}$, для которых $\{0, g\} \in \mathfrak{B}(A)$; очевидно, это будут те вектора, на которые отличаются значения Af, соответствующие одному и тому же f. Совокупность $\mathfrak{M}(A)$ назовем **областью многозначности** A. Обозначая вообще через $O \oplus \mathfrak{S}$ совокупность всех пар $\{O, f\}$, $f \in \mathfrak{S}$, имеем

$$O \oplus \mathfrak{M}(A) = \mathfrak{B}(A)(O \oplus \mathfrak{H});$$

отсюда $\mathfrak{W}(A)$ линейно для любого линейного A. Если же A замкнут, то и $\mathfrak{M}(A)$ замкнуто. В частности, $\mathfrak{M}(A^*)$ всегда линейно и замкнуто. Найдем связь между $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{M}(A^*)$. Пусть $f \in \mathfrak{D}(A)$, $g \in \mathfrak{M}(A^*)$; тогда $\{O, g\} \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}) \ominus U\mathfrak{B}(A)$, $\{O, g\} \perp U\mathfrak{B}(A)$, $\{O, g\} \perp \{Af, -f\}$, $(g, f) = 0$,

$$g \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A);$$

обратно, из последнего соотношения следует

$$\{O, g\} \in \mathfrak{B}(A^*), \quad g \in \mathfrak{M}(A^*).$$

Таким образом

$$\mathfrak{M}(A^*) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A); \quad \overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}(A^*). \tag{1}$$

Определим еще произведение AB двух операторов A и B. AB имеет смысл, если Bf имеет смысл и, хотя бы для одного из значений Bf, $A(Bf)$ имеет смысл. Тогда по определению $ABf = A(Bf)$, причем допускаются все значения $Bf \in \mathfrak{D}(A)$ и все значения A для таких Bf. Легко проверить, что $(AB)^* \supset B^*A^*$.

Обратимся теперь к замкнутому симметрическому оператору H в пространстве $\mathfrak{H}$, который, конечно, однозначен. Однако различные сопряженные операторы и замыкания, которые будут встречаться в дальнейшем, не обязательно однозначны. Равенства между такими операторами следует понимать тогда в смысле совпадения их графиков.

Повторяя, в основном, те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1 ([1]), приходим к следующей теореме:

Теорема 1. *Для любого замкнутого симметрического оператора H*

$$(H^2)^* = \widetilde{H^{*2}}. \tag{2}$$

Далее имеет место

Теорема 2. *Для любого замкнутого симметрического оператора* * H

$$\mathfrak{M}(\widetilde{H^{*2}}) = (H^*H + 1)\,\mathfrak{P},$$

где $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}(H^*H)\,(\overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+})$.

Доказательство. Пусть $h = (H^*H + 1)\,p$, $p \in \mathfrak{P}$. Так как $p \in \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}$, то существуют $\varphi_n \in \mathfrak{M}^-$, $\psi_n \in \mathfrak{M}^+$ такие, что $\varphi_n + \psi_n \to p$; тогда $H^{*2}(\varphi^n + \psi_n) = -\varphi_n - \psi_n \to -p$. С другой стороны, $p \in \mathfrak{D}(H^*H)$, $H^{*2}p = H^*Hp$. Таким образом $\{p, -p\} \in \mathfrak{B}(\widetilde{H^{*2}})$ и $\{p, H^*Hp\} \in \mathfrak{B}(\widetilde{H^{*2}})$, следовательно, также $\{O, H^*Hp + p\} \in \mathfrak{B}(\widetilde{H^{*2}})$, $h = (H^*H + 1)\,p \in \mathfrak{M}(\widetilde{H^{*2}})$. Пусть, обратно,

* $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ собственные подпространства H^*, соответствующие $-i$, i.

$h \in \mathfrak{M}(\widetilde{H^{*2}})$. Тогда существует последовательность $g_n = f_n + \varphi_n + \psi_n \to 0$, $f_n \in \mathfrak{D}(H^*H)$, $\varphi_n \in \mathfrak{M}^-, \psi_n \in \mathfrak{M}^+$ такая, что

$$H^{*2} g_n = H^*Hf_n - \varphi_n - \psi_n \to h.$$

Но тогда $H^*Hf_n + f_n \to h$, $f_n \to (H^*H+1)^{-1} h \in \mathfrak{D}(H^*H)$. С другой стороны, полагая $f = (H^*H+1)^{-1} h$, имеем

$$f = -\lim (\varphi_n + \psi_n) \in \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+},$$

так что

$$f \in \mathfrak{D}(H^*H) \cdot (\overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}) = \mathfrak{P}, \quad h = (H^*H+1) f \in (H^*H+1)\mathfrak{P}.$$

Теперь легко установить, что для симметрического оператора H, построенного в конце ([1]), $\mathfrak{D}(H^2) = (0)$. В самом деле, для этого оператора $\overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+} = \mathfrak{H}$, так что

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}(H^*H), \quad \mathfrak{M}(\widetilde{H^{*2}}) = (H^*H+1)\mathfrak{D}(H^*H) = \mathfrak{H}.$$

Отсюда в силу (1) и (2)

$$\mathfrak{D}(H^2) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}(H^{2*}) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}(\widetilde{H^{*2}}) = (0).$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
26 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Наймарк, ДАН, XXVI, № 9 (1940).