Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IV 1940)

Пусть функция $f(x)$ задана и конечна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Обозначим через $U_n(f) = U_n(f; x)$ тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, совпадающий с $f(x)$ в точках

$$x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad (k = 1, 2 \ldots 2n+1). \tag{1}$$

Известно, что такой полином существует и определяется единственным образом.

1. Теорема 1. *Если $f(x)$ интегрируема (R) на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, то для любого $p > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} |f - U_n(f)|^p \, dx = 0. \tag{2}$$

Замечание. В случае, когда функция f непрерывна и $f(0) = f(2\pi)$, теорема доказана Марцинкевичем ([1]).

Доказательство. Достаточно будет доказать соотношение (2) для случая $p > 1$. Нам потребуется след. предложение Марцинкевича ([1]).

Лемма Марцинкевича. Если $S(x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ и точки x_k определены, как выше, то для любого $p > 1$

$$\int\limits_0^{2\pi} |S(x)|^p \, dx \leqslant A_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |S(x_k)|^p, \tag{3}$$

где константа A_p зависит только от p.

Пусть теперь $f(x)$ интегрируема (R) на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и $p > 1$. Можно очевидно считать, что $|f(x)| \leqslant 1$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим совокупность E тех точек интервала $[0, 2\pi]$, в которых колебание функции $f(x)$ больше или равно ε. Известно, что E имеет меру Jordan'a, равную нулю. Следовательно, можно построить на $[0, 2\pi]$ конечную совокупность $\sum$ замкнутых дизъюнктных интервалов, содержащую точки $x = 0$ и $x = 2\pi$, содержащую внутри себя каждую точку множества E, которая лежит на $(0, 2\pi)$, и такую, что сумма длин интервалов $\sum$ меньше ε. Известно, что можно построить функцию $F(x)$, непрерывную на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, такую, что $|F(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и в каждой точке x интервала $[0, 2\pi]$, не принадлежащей $\sum$

$$|f(x) - F(x)| < 2\varepsilon. \tag{4}$$

Можно распорядиться при этом так, что $F(0) = F(2\pi)$.

В силу неравенства

$$(a+b)^p \leqslant 2^p (a^p + b^p) \qquad (a \geqslant 0, \ b \geqslant 0) \tag{5}$$

имеем, полагая $\Phi = f - F$,

$$\int_0^{2\pi} | f - U_n(f) |^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left[\int_0^{2\pi} | \Phi - U_n(\Phi) |^p \, dx + \int_0^{2\pi} | F - U_n(F) |^p \, dx \right] \equiv 2^p (I_1 + I_2). \qquad (6)$$

В силу теоремы Марцинкевича $I_2 \to 0$ и остается исследовать I_1:

$$I_1 \leqslant 2^p \int_0^{2\pi} | \Phi |^p \, dx + 2^p \int_0^{2\pi} | U_n(\Phi) |^p \, dx \leqslant 2^p \int_{\Sigma} | \Phi |^p \, dx +$$

$$+ 2^p \int_{C\Sigma} | \Phi |^p \, dx + 2^p A_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} | U_n(\Phi;\ x_k) |^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \int_{\Sigma} 2^p \, dx + 2^p \int_{C\Sigma} (2\varepsilon)^p \, dx + 2^p A_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} | \Phi(x_k) |^p \leqslant$$

$$\leqslant 4^p \varepsilon + 4^p \, 2\pi\varepsilon^p + 2^p A_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} | \Phi(x_k) |^p. \qquad (7)$$

Положим

$$\sum_{k=1}^{2n+1} | \Phi(x_k) |^p = \left(\sum\nolimits_{\mathrm{I}} + \sum\nolimits_{\mathrm{II}} \right) | \Phi(x_k) |^p, \qquad (8)$$

где сумма $\sum_{\mathrm{I}}$ распространена на те точки x_k, которые лежат на $\sum$, а сумма $\sum_{\mathrm{II}}$ распространена на все прочие x_k. Если $|\sum|$ есть мера совокупности $\sum$, N — число интервалов, входящих в $\sum$, Z — число точек x_k, лежащих на $\sum$, то простой расчет показывает, что

$$Z \leqslant \frac{2n+1}{2\pi} \left| \sum \right| + N \qquad (9)$$

и, следовательно,

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}} \leqslant 2^p Z \leqslant 2^p \left(\frac{2n+1}{2\pi} \varepsilon + N \right). \qquad (10)$$

Очевидно, что

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}} \leqslant (2n+1)(2\varepsilon)^p. \qquad (11)$$

Теорема следует из оценок (7), (8), (10) и (11).

2. Из теоремы 1 и неравенства Hölder'а, очевидно, следует, что, если функция $f(x)$ интегрируема (R), а $g(x)$ измерима и $| g(x) |^q$ суммируем для некоторого $q > 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} U_n(f) \, g \, dx = \int_0^{2\pi} f g \, dx \qquad (12)$$

и даже

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} | f - U_n(f) | \, | g | \, dx = 0. \qquad (13)$$

Если функция f интегрируема (R), а $g(x)$ предположена только суммируемой, то мы, очевидно, не имеем права заключить, что верно соотношение (13) и даже что верно (12). В самом деле, можно доказать (см. ниже, теорема 3), что существует непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π и суммируемая функция $g(x)$ такая, что (12) неверно.

Однако имеет место

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема (R), а $g(x)$ измерима и такова, что $|g(x)|\log^+ g(x)|$ суммируема, то верно соотношение* (12).

Доказательство. Для любой суммируемой функции φ

$$\int_0^{2\pi} U_n(f)\varphi\,dx = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,S_n(\varphi;\ x_k),$$

где $S_n(\varphi;\ x)$ есть n-ая частная сумма ряда Фурье функции φ.

Можно определить (2) тригонометрический полином $G(x)$ так, что

$$\int_0^{2\pi} |g-G|\,dx < \varepsilon, \tag{14}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно малое число. В силу замечания в начале п. 2

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} U_n(f)\,G\,dx = \int_0^{2\pi} fG\,dx. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} U_n(f)\,g\,dx - \int_0^{2\pi} fg\,dx = \int_0^{2\pi} U_n(f)\,g\,dx - \int_0^{2\pi} U_n(f)\,G\,dx +$$

$$+\int_0^{2\pi} U_n(f)\,G\,dx - \int_0^{2\pi} fG\,dx + \int_0^{2\pi} fG\,dx - \int_0^{2\pi} fg\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} U_n(f)(g-G)\,dx + o(1) + \int_0^{2\pi} f(G-g)\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,S_n(g-G;\ x_k) + o(1) + \int_0^{2\pi} f(G-g)\,dx. \tag{16}$$

Отсюда следует, считая попрежнему, что $|f(x)| \leqslant 1$,

$$\left|\int_0^{2\pi} U_n(f)\,g\,dx - \int_0^{2\pi} fg\,dx\right| \leqslant \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} |S_n(g-G, x_k)| + o(1) + \varepsilon. \tag{17}$$

Марцинкевич доказал (1), что существует абсолютная константа A такая, что для любого тригонометрического полинома S порядка $\leqslant n$ имеем

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} |S(x_k)| \leqslant A\int_0^{2\pi} |S(x)|\,dx. \tag{18}$$

При всех достаточно больших n имеем

$$S_n(g-G;\ x) = S_n(g;\ x) - G(x) = [S_n(g;\ x) - g(x)] + [g(x) - G(x)]. \tag{19}$$

Кроме того

$$\int_0^{2\pi} |g(x) - S_n(g;\ x)|\,dx \to 0. \tag{20}$$

Теорема следует из формул (17), (18), (19) и (20).

Теорема 3. *Существует непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π и суммируемая функция $g(x)$ такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} U_n(f)\,g\,dx = +\infty.$$

Доказательство см. в работе (3).

3. Марцинкевич и Зигмунд доказали ([4]), что, если

$$\theta_k = \theta_k^{(m)} = \frac{2k\pi}{m} \qquad (k = 1, 2 \ldots m;\ m \text{ целое} \geqslant 2n+1), \qquad (21)$$

то для любого тригонометрического полинома S порядка $\leqslant n$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^p d\theta \leqslant A_p \frac{2\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} |S(\theta_k)|^p, \qquad (22)$$

где константа A_p зависит только от $p > 1$. Совершенно очевидно, что если ϑ любое вещественное число, то

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^p d\theta \leqslant A_p \frac{2\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} |S(\theta_k + \vartheta)|^p. \qquad (23)$$

Это тривиальное обобщение нам сейчас потребуется.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема (R) на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и пусть $L_n(f) = L_n(f;\ x)$ есть интерполяционный полином Лагранжа порядка $\leqslant n-1$, совпадающий с $f(x)$ в корнях n-го полинома Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Тогда для любого $p > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f - L_n(f)|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \qquad (24)$$

Замечание. Если f непрерывна, то соотношение (24) доказано Erdös'ом и Feldheim'ом ([5]). Для случая, когда f интегрируема (R), Erdös и Turán ([6]) доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f - L_n(f)|^2 dx = 0.$$

Доказательство теоремы 4. Положим $F(\theta) = f(\cos\theta)$. Функция $F(\theta)$, очевидно, четная и интегрируема (R) на $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Пусть $U_n(\theta) = L_n(f;\ \cos\theta)$. Ясно, что $U_n(\theta)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$, совпадающий с $F(\theta)$ в точках

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{n} \qquad (k = -(n-1),\ -(n-2),\ \ldots 0,\ 1,\ \ldots n). \qquad (25)$$

Пользуясь леммой, высказанной в начале п. 3, можно доказать, повторяя почти дословно рассуждения Марцинкевича в работе ([1]), что для любой четной непрерывной функции $F(\theta)$ периода 2π имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U_n(F;\ \theta) - F(\theta)|^p d\theta \to 0, \qquad (26)$$

где $U_n(F;\ \theta)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$, совпадающий с $F(\theta)$ в точках (25) [совпадание в $2n$ точках (25) обеспечено именно в силу четности функции $F(\theta)$]. Далее, повторяя рассуждения §1, убедимся, что (26) верно для всякой интегрируемой (R) на $[-\pi, \pi]$ и четной функции $F(\theta)$. В частности (26) верно для функции $F(\theta) = f(\cos\theta)$, откуда и следует теорема 4.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation. I, Studia Math., **6**, 1—17. [2] Зигмунд, Тригонометр. ряды, гл. VII. [3] С. Лозинский, О тригонометр. интерполяции, Изв. АН (1940). [4] I. Marcinkiewicz a. A. Zygmund, Mean values of trigonometrical polynomials, Fund. Math., **28**. [5] P. Erdös et E. Feldheim, C. R. Acad. Sci., Paris, **203**, 913—915 (1936). [6] P. Erdös a. P. Turán, On interpolation. I, Ann. of Math., **38**, 142—155.