Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. СИРВИНТ

СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 V 1940)

1. Мы обязаны Arzela весьма употребительным критерием компактности множеств непрерывных функций. Он основан на понятии равномерной непрерывности множества функции. Нам важно сейчас сформулировать определение этого понятия на языке сходимости. Множество G непрерывных в $a \leqslant t \leqslant b$ функций $x(t)$ называется равномерно непрерывным, если, каковы бы ни были a_n, b_n из (a, b) такие, что $(a_n - b_n) \longrightarrow 0$, для последовательности $f_n(x) = x(a_n) - x(b_n)$ выполняется: $f_n(x) \longrightarrow 0$ равномерно на множестве G непрерывных функций.

Критерий компактности Arzela [1]. Для того чтобы множество G непрерывных в (a, b) функций было компактно (т. е. каждая бесконечная часть G содержала бы равномерно сходящуюся последовательность непрерывных функций), необходимо и достаточно, чтобы G было равно ограничено и равномерно непрерывно.

Из этого критерия И. Гельфанд вывел недавно [2] свой изящный критерий компактности множеств.

Критерий компактности Гельфанда. Пусть E сепарабельное пространство типа (B). Для того чтобы $G \subset E$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы для любой слабо сходящейся к нулю последовательности линейных функционалов $f_n(x)$ выполнялось $f_n(x) \longrightarrow 0$ равномерно на G *.

Опираясь на этот критерий, Гельфанд установил общие формы ряда вполне непрерывных операций.

В этой заметке излагаются аналогичные результаты относительно слабо компактных множеств. При этом устанавливается, что, подобно тому, как понятие компактности связано с понятием равномерной сходимости, понятие слабой компактности связано с понятием квази-равномерной сходимости, принадлежащим также Arzela [3].

Говорят, что последовательность $f_n(x)$ функций с вещественными значениями, определенных на абстрактном множестве G элементов x, стремится к нулю квази-равномерно на G, если при каждом фиксированном $x \in G$, $f_n(x) \longrightarrow 0$, и кроме того, по любому $\varepsilon > 0$ и целому N можно указать конечный набор индексов $n_1, \ldots, n_k$, превосходящих N и таких, что сумма множеств $U_i = \underset{x}{\mathcal{E}}(|f_{n_i}(x)| < \varepsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ покрывает G.

* В работе Гельфанда [2] утверждается, что этот критерий верен и для несепарабельных пространств. Однако доказательство этого, данное Гельфандом, является безупречным лишь в части необходимости критерия.

2. В пространстве E^*, сопряженном к пространству E типа (B), можно, как известно, двояким образом определять слабую сходимость точек.

Мы будем говорить, что последовательность $f_n \in E^*$, собственно, слабо сходится к $f \in E^*$, если для любого $\xi \in E^{**}$, $\xi(f_n) \to \xi(f)$. Напротив, $f_n \in E^*$ несобственно слабо сходится к $f \in E^*$, если для любого $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$. Множество $G \in E$ (где E некоторое пространство типа (B), которое может быть и сопряженным к другому пространству) называется слабо компактным, если любая его бесконечная часть содержит последовательность, собственно слабо сходящуюся к некоторому элементу пространства E.

Имея в виду сформулировать критерий слабой компактности множеств в пространстве (C) непрерывных функций, введем понятие квази-равномерно непрерывного множества функций.

Множество G непрерывных функций $x(t)$ называется квази-равномерно непрерывным, если, каковы бы ни были a_n, b_n из (a, b) такие, что $(a_n - b_n) \to 0$, для последовательности $f_n(x) = x(a_n) - x(b_n)$ выполняется: $f_n(x) \to 0$ квази-равномерно на G.

Теорема 1. *Для того чтобы множество непрерывных функций было слабо компактно (т. е. чтобы любая его бесконечная часть содержала последовательность, равноограниченную и сходящуюся в каждой точке t промежутка (a, b) к некоторой непрерывной в (a, b) функции), необходимо и достаточно, чтобы это множество было равноограничено и квази-равномерно непрерывно.*

Методом, аналогичным гельфандовскому, отсюда выводится

Теорема 2. *Пусть E—сепарабельное пространство типа (B). Для того чтобы $G \subset E$ было слабо компактно, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $f_n \in E^*$, несобственно слабо сходящейся к нулю, выполнялось: $f_n(x) \to 0$ квази-равномерно на G.*

Далее, опираясь на одну теорему Banach'a [4], удается доказать

Теорему 3. *Пусть E—сепарабельное пространство типа (B). Для того чтобы $G \subset E$ было слабо компактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $f_n \in E^*$, несобственно слабо сходящейся к нулю, выполнялось следующее. По любому $\varepsilon > 0$ можно указать неотрицательные числа $c_1, \ldots, c_n$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, такие, что*

$$\sup_{x \in G} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| < \varepsilon.$$

Оба высказанные критерия в части их необходимости верны и для несепарабельных пространств типа (B)

Отметим, что аналогично теореме 1 можно установить

Теорему 4. *Слабая компактность множества G в пространстве (C) сходящихся последовательностей означает, что $f_n(x) = \xi_n$ (n-ая координата элемента x) стремится к $f(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ квази-равномерно на G.*

Отметим также, что из теоремы 3 сразу следуют теоремы I и II из работы Шмульяна [5].

3. Если последовательность функций с вещественными значениями $f_n(x)$, определенных на абстрактном множестве G, такова, что любая ее частичная последовательность стремится к нулю квази-равномерно на G, то говорят, что $f_n(x) \to 0$ почти равномерно на G *.

Теорема 5. *Для того чтобы последовательность $f_n \in E^*$ собственно слабо сходилась к нулю, необходимо и достаточно, чтобы $f_n(x) \to 0$ почти равномерно на единичной сфере в пространстве E.*

Последняя теорема позволяет, напр., получить вид собственной слабой сходимости пространства функции ограниченной вариации. Громоздкость соответствующей формулировки не позволяет привести ее здесь.

Резюмируя результаты предшествующего параграфа, мы можем теперь сказать: для того чтобы множество G сепарабельного пространства E было слабо компактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая несобственно слабо сходящаяся к нулю последовательность $f_n \in E^*$ вела себя на множестве G так, как собственно слабо сходящаяся последовательность функционалов ведет себя на единичной сфере пространства E.

4. Пусть $y = U(x)$ есть линейный оператор, переводящий пространство E в часть сепарабельного пространства E_1. Тогда необходимым и достаточным условием вполне-непрерывности оператора $y = U(x)$ является: сопряженный оператор $f = U^*(g)$ переводит всякую несобственно слабо сходящуюся последовательность элементов E_1^* в сходящуюся последовательность элемента E^* [Гельфанд (1)]. В части необходимости это условие верно и для несепарабельного E_1.

Оператор $y = U(x)$ называют слабо вполне-непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество пространства E в слабо компактное множество пространства E_1. В последнее время этот класс линейных операторов привлек к себе внимание ряда ученых (6, 7, 8). Эти операторы находят применение в теории стохастических процессов.

Теорема 6. *Пусть $y = U(x)$ есть линейный оператор, переводящий E в часть сепарабельного пространства E_1. Необходимое и достаточное условие слабой вполне-непрерывности оператора $y = U(x)$ есть: сопряженный оператор $f = U^*(g)$ переводит всякую несобственно слабо сходящуюся последовательность элементов E_1^* в собственно слабо сходящуюся последовательность элементов E^*.*

Необходимость этого условия, верная и для несепарабельного E_1, была, независимо от автора, установлена В. Гантмахер (8).

5. Мы применим теперь полученные теоремы для установления общей формы слабо вполне-непрерывной операции, переводящей любое пространство типа (B) E в (C).

Как известно (2), общая форма линейной операции из E в (C) есть $Y = f_t(x)$, где f_t—функция вещественного переменного t $(a \leqslant t \leqslant b)$ со значениями в E^*. При этом из $t_n \to t$ следует: f_{t_n} несобственно слабо $\to f_t$.

Общая форма вполне-непрерывной операции будет получена, если требовать, чтобы из $t_n \to t$ следовало $f_{t_n} \to f_t$ по норме в E^*.

Теорема 7. *Общая форма слабой вполне-непрерывной операции из E в (C) есть $y = f_t(x)$, где $f_t \in E^*$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ и из $t_n \to t$ следует: f_{t_n} собственно слабо $\to f_t$.*

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Arzela, Memorie Bologna, 5 ser., **5** (1895—1896). [2] И. Гельфанд, Мат. сб., **46** (1938). [3] Arzela, Accad. dei Lincei di Bologna, 5 ser., **8** (1900). [4] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, p. 223 (1932). [5] В. Шмульян, Записки Н.-Д. И. М. М. і Харківського Мат. тов., сер. V, XIV (1937). [6] Kakutani a. Yosida, Proc. of Imp. Ac., v. 14 (1938). [7] Dunford a. Pettis, Proc. of Nat. Ac. Sc. USA, v. 25 (1939). [8] Вера Гантмахер, Мат. сб., 49 (1940).

* Этот термин принадлежит Фихтенгольцу и Канторовичу, встретившихся с почти равномерной сходимостью при изучении линейных функционалов в пространстве (M).