Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и Д. А. РАЙКОВ

К ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ КОММУТАТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1940)

Пусть G коммутативная топологическая группа (со второй аксиомой счетности или локально бикомпактная), для всех множеств X элементов которой определена внешняя мера $\mu(X)$, удовлетворяющая следующим условиям:

I_1. $0 \leqslant \mu(X) \leqslant \infty$. I_2. $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_n)$, если $X \subset \sum X_n$ (сумма конечна или счетна). $\mathrm{I}_3 \cdot \mu(\Lambda) = 0$, где Λ—пустое множество.

II_1. Все открытые множества измеримы и имеют меру отличную от нуля. II_2. $\mu(X) = \inf \mu(U)$, где U—открытые множества, покрывающие X. II_3. Существует окрестность нуля группы, имеющая конечную меру.

III_1. Мера инвариантна: $\mu(X+g) = \mu(X)$ для всех X и всех $g \in G$. III_2. Мера симметрична: $\mu(-X) = \mu(X)$.

IV. Мера непрерывна относительно сдвигов: если $\mu(X) < \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_ε нуля группы такая, что $\mu(X) - \mu(X \cap X+g) < \varepsilon$ для всех $g \in U_\varepsilon$.

Совокупность всех суммируемых (относительно меры μ) комплексных функций $x(g)$ образует пространство Банаха L с обычными сложением и умножением на комплексные числа и с нормой $\|x\| = \int |x(g)|\, dg$. В L можно также определить умножение («свертывание») элементов: в силу теоремы Фубини, для любых x, $y \in L$ функция

$$x * y(g) = \int x(g-h)\, y(h)\, dh = \int y(g-h)\, x(h)\, dh = y * x(g)$$

существует почти для всех g и принадлежит к L, причем

$$\|x * y\| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Из IV вытекает, что если $y \in L$ ограничена, то $z = x * y$ непрерывна и ограничена для любого $x \in L$.

Возможны два случая:

1° Каждая точка $g \in G$ имеет положительную меру. В этом случае группа дискретна. Функция $e(g)$, равная 1 при $g=0$ и 0 при $g \neq 0$, есть единица относительно введенного в L умножения. L является нормированным кольцом ([1]).

2° Каждая точка $g \in G$ имеет меру 0. L не содержит единицы; действительно, содержащиеся в L ограниченные разрывные функции при свертывании с любой функцией из L переходят в функции непрерывные.

Для расширения L до нормированного кольца R присоединим формально единицу e и будем считать элементами кольца R суммы $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$, где λ—комплексные числа, а $x\in L$. Алгебраические операции определяются естественно; норму $\|\mathfrak{z}\|$ определим как $|\lambda|+\|x\|$. Число, в которое переходит элемент $\mathfrak{z}$ при гомоморфизме $R\to R/M$ кольца R по его максимальному идеалу M, будем обозначать через $(\mathfrak{z}, M)$. В кольце R совокупность всех функций из L образует максимальный идеал; обозначим его через M_0. Имеем $(\mathfrak{z}, M_0)=\lambda$, в частности $(x, M_0)=0$ для всех $x\in L$.

Наши дальнейшие рассмотрения будут проводиться для кольца R; однако все они, с соответствующими упрощениями, будут иметь силу и для случая 1°, когда L само является нормированным кольцом с единицей.

Теорема 1. *Каждый максимальный идеал M кольца R, отличный от M_0, порождает непрерывный характер группы G.*

Доказательство. Так как $M\neq M_0$, то существует $x\in L$ такое, что $(x, M)\neq 0$. Положим

$$\chi(h)=\frac{(x(g+h), M)}{(x(g), M)}. \tag{1}$$

Имеем $\chi(0)=1$, $|\chi(h)|\leqslant\frac{\|x\|}{|(x, M)|}=C$, далее

$$|\chi(a+h)-\chi(a)|\leqslant\frac{\|x(g+a+h)-x(g+a)\|}{|(x, M)|},$$

и так как, в силу IV и III, числитель непрерывен относительно h и не зависит от a, то $\chi(h)$ является равномерно непрерывной функцией. В силу инвариантности меры,

$$x(g+a+b) * x(g)=x(g+a) * x(g+b),$$

откуда

$$(x(g+a+b), M)(x(g), M)=(x(g+a), M)(x(g+b), M).$$

Деля на $(x(g), M)^2$, получаем

$$\chi(a+b)=\chi(a)\chi(b). \tag{2}$$

Отсюда следует, что $|\chi(h)|\leqslant 1$. Действительно, если $|\chi(h_0)|=1+\varepsilon>1$, то $|\chi(nh_0)|=(1+\varepsilon)^n$, что противоречит ограниченности $\chi(h)$. Полагая теперь в (2) $b=-a$, получаем $1=\chi(a)\chi(-a)$, откуда $|\chi(h)|\equiv 1$. Таким образом, $\chi(h)$ есть непрерывный характер группы G. Из равенства $x(g+h) * y(g)=x(g) * y(g+h)$ следует, что

$$\chi(h)(y(g), M)=(y(g+h), M) \text{ для всех } y\in L, \tag{3}$$

т. е. χ не зависит от выбора x.

Теорема 2. *Каждый измеримый характер $\chi(h)$ группы G порождает максимальный идеал кольца R, отличный от M_0.*

Доказательство. Каждому $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$ поставим в соответствие число

$$(\mathfrak{z}, \chi)=\lambda+\int x(g)\overline{\chi}(g)\,dg.$$

Сложению и умножению элементов кольца будет соответствовать обычное умножение и сложение этих чисел (для сложения это очевидно, для умножения проверяется с помощью теоремы Фубини). Отсюда следует, что элементы $\mathfrak{z}\in R$, для которых $(\mathfrak{z}, \chi)=0$, образуют максимальный идеал M_χ кольца R. Беря $\mathfrak{z}=x(g)\chi(g)$, где $\int x(g)\,dg\neq 0$, получаем $(\mathfrak{z}, \chi)\neq 0$, и, значит, $M_\chi\neq M_0$.

Теорема 3. *Измеримый характер совпадает с непрерывным характером, порождаемым порожденным им максимальным идеалом. Таким образом каждый измеримый характер непрерывен.*

Доказательство. Пусть $(x, \chi) \neq 0$. Имеем

$$(x(g+h), \chi) = \int x(g+h)\bar{\chi}(g)\,dg = \chi(h)\int x(g+h)\bar{\chi}(g+h)\,dg =$$
$$= \chi(h)\int x(g)\bar{\chi}(g)\,dg = \chi(h)(x(g), \chi),$$

откуда

$$\chi(h) = \frac{(x(g+h), \chi)}{(x(g), \chi)}.$$

Теорема 4. *Каждый непрерывный характер порождается только одним максимальным идеалом.*

Доказательство. Пусть максимальный идеал M порождает характер $\chi(g)$. Если M не совпадает с максимальным идеалом M_χ, порожденным этим характером, то существует функция $x \in L$ такая, что $(x, M) \neq \int x(h)\bar{\chi}(h)\,dh$. Тогда для любой функции $y \in L$ с $(y, M) \neq 0$ получаем

$$(x, M)(y, M) = \left(\int y(g-h)x(h)\,dh,\ M\right) \neq \int x(h)(y(g), M)\bar{\chi}(h)\,dh =$$
$$= \int (y(g-h)x(h), M)\,dh.$$

Таким образом достаточно доказать, что для любых $x, y \in L$ имеет место равенство

$$\left(\int y(g-h)x(h)\,dh, M\right) = \int (y(g-h)x(h), M)\,dh. \qquad (4)$$

Но линейный функционал (x, M) определяет в G комплексную «меру», которая, в силу неравенства $|(x_X(g), M)| \leqslant \|x_X(g)\| = \mu(X)$ ($x_X(g)$ — характеристическая функция множества X), удовлетворяет условиям, достаточным для того, чтобы можно было рассматривать (4) как следствие теоремы Фубини.

Следствие [обобщение теоремы Винера ([2])]. *Для того чтобы элемент* $\mathfrak{z} = \lambda e + x(g)$ *имел в кольце* R *обратный, необходимо и достаточно, чтобы для всех непрерывных характеров группы* G *выполнялось неравенство*

$$\lambda\left(\lambda + \int x(g)\chi(g)\,dg\right) \neq 0.$$

Теорема 5. *Кольцо* R *не содержит обобщенных нильстепенных элементов.*

В основе доказательства теоремы 5 лежит следующая

Лемма. *Ограниченная эрмитово-симметрическая функция* $x \in L$ *с положительной нормой не является обобщенным нильстепенным элементом кольца* R.

Доказательство леммы. По условию, $x(-g) = \bar{x}(g)$. Положим $x^{(0)}(g) = e$, $x^{(n)}(g) = x^{(n-1)}(g) * x(g)$ ($n = 1, 2, \ldots$). $x^{(n)}(g)$ эрмитово-симметричны и при $n \geqslant 2$ непрерывны. Если бы $x(g)$ была обобщенным нильстепенным элементом, то мы имели бы $\|\lambda^n x^{(n)}\| \to 0$ при любом λ. Покажем, что $\|\lambda^{2n-1}x^{(2n-1)}\| \to \infty$ для всех достаточно больших λ. Прежде всего,

$$|\lambda^n x^{(n)}(0)| = |\lambda|\left|\int x(-g)\lambda^{n-1}x^{(n-1)}(g)\,dg\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| \sup|x(g)|\,\|\lambda^{n-1}x^{(n-1)}\|. \qquad (5)$$

Положим $x^{(2n)}(0) = c_n$. Имеем $c_n = \int |x^{(n)}(g)|^2\,dg$. Отсюда $c_1 > 0$ и, в силу непрерывности $x^{(2)}(g)$, также $c_2 > 0$, ибо иначе $c_1 = x^{(2)}(0) = 0$. Далее, по неравенству Шварца,

$$c_n^2 = \left| \int x^{(n-1)}(-g)\, x^{(n+1)}(g)\, dg \right|^2 \leqslant \int |x^{(n-1)}(g)|^2\, dg \int |x^{(n+1)}(g)|^2\, dg = c_{n-1} c_{n+1}.$$

Таким образом имеем

$$0 < \frac{c_2}{c_1} \leqslant \frac{c_3}{c_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \ldots,$$

и значит $\lambda^{2n} c_n \longrightarrow \infty$ для всех $\lambda > \lambda_0 \geqslant 0$. В силу (5) тогда также $\|\lambda^{2n-1} x^{(2n-1)}\| \longrightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 5. Если $\mathfrak{z} = \lambda e + x(g)$ обобщенный нильстепенный элемент, то $\lambda = (\mathfrak{z}, M_0) = 0$ и $\mathfrak{z} = x(g)$. Пусть $\|x\| > 0$. Нетрудно показать, что существует такая ограниченная функция $u \in L$, что $y(g) = x * u(g) \neq 0$, причем $\Re y(0) \neq 0$. $y(g)$ непрерывна и ограничена. Рассмотрим функцию $z(g) = y(g) + \overline{y}(-g)$. Имеем $\overline{z}(-g) = \overline{z}(g)$ и $z(0) = 2\Re y(0) \neq 0$. Так как $z(g)$ непрерывна, то $\|z\| > 0$. Таким образом, в силу леммы, $z(g)$ не может быть обобщенным нильстепенным элементом. Но тогда то же справедливо и относительно $y(g)$, ибо вместе с $y(g)$ также $\overline{y}(-g)$ было бы обобщенным нильстепенным элементом. Но в таком случае и $\mathfrak{z}$ не может быть обобщенным нильстепенным элементом.

Теорема 6. *Группа G обладает достаточным множеством непрерывных характеров: для каждого $g_0 \in G$ существует непрерывный характер $\chi(g)$ группы G такой, что $\chi(g_0) \neq 1$.*

Доказательство. Выберем функцию $x(g) \in L$ так, чтобы $\|x(g+g_0) - x(g)\| > 0$. Так как, по теореме 5, $x(g+g_0) - x(g)$ не является обобщенным нильстепенным элементом, то найдется такой максимальный идеал M, что $(x(g+g_0), M) \neq (x(g), M)$. Из (1) следует тогда, что

$$\chi(g_0) = \frac{(x(g+g_0), M)}{(x(g), M)} \neq 1.$$

Теоремы 1—4 показывают, что множество X всех непрерывных характеров группы G можно рассматривать как множество всех максимальных идеалов кольца R, отличных от M_0. Пусть $\mathfrak{M}$ бикомпактное топологическое пространство всех максимальных идеалов кольца R ([1], определение 5). Тогда $\mathfrak{M} \dot{-} M_0 = X$ есть локально бикомпактное пространство *. При этом окрестности характера χ_0 определяются произвольными функциями $x_k(g) \in L$ $(k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ и произвольными $\varepsilon > 0$ как совокупности всех характеров χ, удовлетворяющих неравенствам

$$\left| \int x_k(g)\overline{\chi}(g)\, dg - \int x_k(g)\overline{\chi}_0(g)\, dg \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Можно показать, что если G локально бикомпактная группа, то эта топология совпадает с обычной ([3], определение 34) и X образует топологическую группу.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
14 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [2] И. М. Гельфанд, ДАН, XXV, № 7 (1939). [3] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы (1938).

* В случае, когда G дискретна, M_0 отсутствует и X совпадает с $\mathfrak{M}$.