Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 3

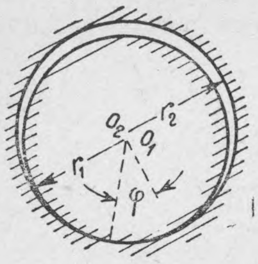
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. ШТАЕРМАН

МЕСТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СЖАТИИ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ, РАДИУСЫ КОТОРЫХ ПОЧТИ РАВНЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 VIII 1940)

В случае сжатия двух цилиндров, сумма кривизны которых весьма мала, теория Герца вследствие принятых им допущений становится неприменимой. Ввиду этого мы используем теорию, изложенную нами в предыдущей статье. Основное интегральное уравнение мы получаем непосредственно из следующих соображений.



Фиг. 1.

Пусть r_1 и r_2—радиусы сжимаемых цилиндров (фиг. 1).

$$\int \bar{p}_1(\bar{r})\, d\sigma = -\bar{k}Pl, \quad \int \bar{p}_2(\bar{r})\, d\sigma = \bar{k}Pl,$$

$$\int \bar{p}_1(\bar{r}) \times \bar{r}\, d\sigma = \int \bar{p}_2(\bar{r}) \times \bar{r}\, d\sigma = 0,$$

где l—длина цилиндров, которую мы будем предполагать весьма большой.

Если r, φ — система полярных координат с полюсом на оси внутреннего цилиндра, то можно приближенно положить:

$$[\bar{r} - \bar{\rho}(\bar{r})]_\varphi = 0, \quad [\bar{r} - \bar{\rho}(\bar{r})]_r = (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi). \tag{1}$$

В силу симметрии $\bar{\omega} = 0$, $\bar{\alpha} = \alpha\bar{k}$.

Проектируя на радиальное направление векторы, входящие в уравнение (3) предыдущей статьи, получим:

$$u_{2r} - u_{1r} = \alpha\cos\varphi - (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi). \tag{2}$$

Поверхности цилиндров будем считать гладкими, так что $p_\varphi = 0$. Что касается внешнего давления, то так как перемещения u_{1r} и u_{2r} мало зависят от того, каким образом осуществляется действие внешних сжимающих сил, мы будем предполагать для простоты, что оно сводится для каждого из цилиндров к нормальному давлению, диаметрально противоположному давлению на поверхности давления. Тогда

$$u_{1r} = 2\vartheta_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \left[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} + 1\right] r_1\, d\varphi' -$$

$$- \varkappa_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \sin|\varphi - \varphi'|\, r_1\, d\varphi', \tag{3}$$

$$u_{2r} = -2\vartheta_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} r_2 \, d\varphi' +$$

$$+ \varkappa_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \sin|\varphi - \varphi'| \, r_2 \, d\varphi',$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad \vartheta_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad \varkappa_1 = \frac{1}{4(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{4(\lambda_2 + \mu_2)},$$

$2\varphi_0$ — угол, под которым видна поверхность давления с оси внутреннего цилиндра. Поставляя (3) в (2), получаем уравнение:

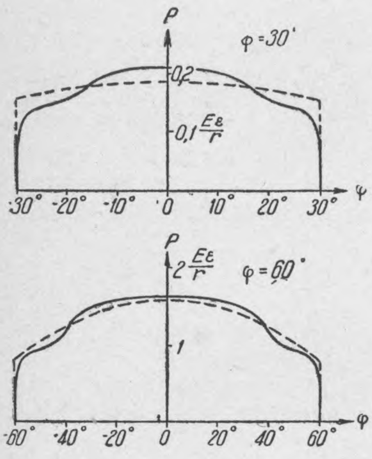
$$2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' -$$

$$-(\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \sin|\varphi - \varphi'| \, d\varphi' + 2\vartheta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \, d\varphi' =$$

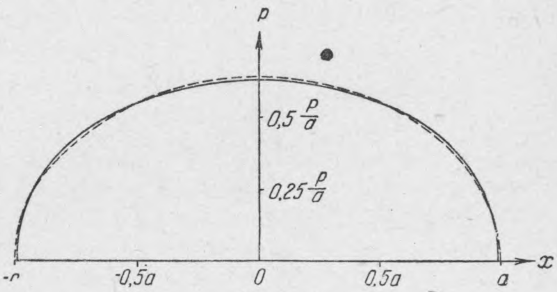
$$= -\alpha \cos\varphi + (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi). \qquad (4)$$

Полагая в (4) $\varphi = 0$, находим:

$$\alpha = -2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \cos\varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi'|}{2} d\varphi' +$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$+(\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \sin|\varphi'| \, d\varphi' - 2\vartheta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \, d\varphi'. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем интегральное уравнение:

$$2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \Big[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} -$$

$$- \cos\varphi \cos\varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi'|}{2} \Big] d\varphi' - (\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') (\sin|\varphi - \varphi'| -$$

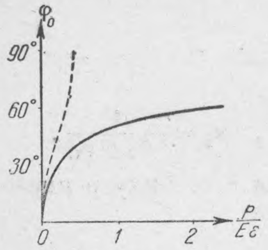
$$- \cos\varphi \sin|\varphi'|) \, d\varphi' + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos\varphi) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \, d\varphi' = (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi). \qquad (6)$$

Это уравнение вместе с условием

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p_r(\varphi') \cos\varphi' \, r_1 d\varphi' = P \qquad (7)$$

определяет давление $p_r(\varphi')$ и угол φ_0.

Для того случая, когда оба цилиндра из одного материала с коэффициентом Пуассона 0,3, распределение давления по поверхности давления показано на фиг. 2. Приближенное решение интегрального уравнения (6) произведено по методу конечных разностей по 10 точкам. Решая тем же приемом и при том же количестве точек уравнение Герца, в которое вырождается уравнение (6) при малых значениях угла φ_0, мы убедились, что погрешность весьма мала; на фиг. 3 показано получаемое при этом распределение давления по поверхности давления, пунктирной линией показано распределение давления, соответствующее точному решению уравнения Герца. Пунктирными линиями на фиг. 2 показано распределение давления при плотном соприкасании тел по круговой цилиндрической поверхности радиуса r_1 под углом $2\varphi_0$, соответствующее тому же значению отношения $\frac{P}{r_1}$ и вычисленное по известной приближенной формуле:



Фиг. 4.

$$p_r(\varphi) = \frac{P}{r_1(\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + \varphi_0)}\cos\varphi.$$

На фиг. 4 показана зависимость между углом φ_0 и сжимающей силой P. Пунктиром на той же фигуре показана зависимость между этими величинами, определяемая по теории Герца.

Поступило
26 VIII 1940