Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 3

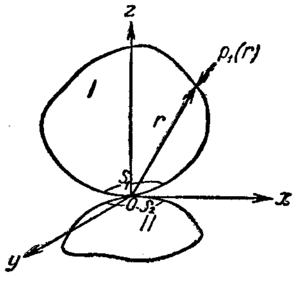
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. ШТАЕРМАН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ГЕРЦА МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СЖАТИИ УПРУГИХ ТЕЛ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 VIII 1940)

Задача о местных деформациях при сжатии упругих тел решена Герцом в несколько упрощенном виде в связи с принятыми им допущениями. Здесь мы даем векторное интегральное уравнение, к которому приводится контактная задача в общем виде.



Пусть O — точка касания тел перед сжатием. Построим систему прямоугольных координат xyz с началом в точке O, расположив оси Ox и Oy в плоскости касания сжимаемых тел (см. фигуру). Пусть далее $\bar{p}_1(\bar{r})$ — внешнее давление в точке поверхности первого тела с радиусом-вектором $\bar{r}$, $\bar{p}_2(\bar{r})$ — внешнее давление, действующее на второе тело. Под действием этого давления некоторая часть поверхности первого тела S_1 придет в соприкосновение с частью S_2 поверхности второго тела. При этом на поверхности S_1 возникнет некоторое давление $\bar{p}(\bar{r})$, на поверхности S_2 — некоторое давление $\bar{q}(\bar{r})$. Пусть далее $\bar{\rho}(\bar{r})$ — радиус-вектор точки поверхности S_1, соприкасающейся с точкой поверхности S_2, имеющей радиус-вектор $\bar{r}$. Тогда

$$\bar{q}(\bar{r}) = -\bar{p}[\bar{\rho}(\bar{r})]. \tag{1}$$

Из условий равновесия сжатых тел получаем следующие уравнения:

$$\int_{S_1} \bar{p}(\bar{r})\, d\sigma + \int \bar{p}_1(\bar{r})\, d\sigma = 0,\quad \int_{S_2} \bar{p}[\bar{\rho}(\bar{r})]\, d\sigma - \int \bar{p}_2(\bar{r})\, d\sigma = 0, \tag{2}$$

$$\int_{S_1} \bar{p}(\bar{r}) \times \bar{r}\, d\sigma + \int \bar{p}_1(\bar{r}) \times \bar{r}\, d\sigma = 0,\quad \int_{S_2} \bar{p}[\bar{\rho}(\bar{r})] \times \bar{r} d\sigma - \int \bar{p}_2(\bar{r}) \times \bar{r} d\sigma = 0.$$

Перейдем теперь к выводу условий касания тел при сжатии. Пусть $\bar{u}_1(\bar{r})$ — перемещение точки первого тела с радиусом-вектором $\bar{r}$ относительно координатной системы $x_1y_1z_1$, имеющей начало в центре тяжести первого тела O_1 и перемещающейся при сжатии вместе с окрестностью центра тяжести этого тела. Аналогичное обозначение введем для второго тела. Пусть далее $\bar{\alpha}$ — перемещение центра тяжести второго тела O_2 относительно центра тяжести первого тела O_1 и $\bar{\omega}$ — поворот системы $x_2y_2z_2$ относительно системы $x_1y_1z_1$ при сжатии. Если бы система $x_2y_2z_2$ не переместилась при сжатии, точка поверхности S_2 с радиусом-вектором $\bar{r}$ после сжатия приобрела бы радиус-вектор $\bar{r}+\bar{u}_2(\bar{r})$. Соответствующая точка поверхности S_1 имела бы после сжатия радиус-вектор $\bar{\rho}(\bar{r})+\bar{u}_1[\bar{\rho}(\bar{r})]$, если бы при сжатии не перемещалась система $x_1y_1z_1$. Таким образом для каждой точки поверхности S_2 должно выполняться условие:

$$\bar{\rho}(\bar{r})+\bar{u}_1[\bar{\rho}(\bar{r})]=\bar{r}+\bar{u}_2(\bar{r})+\bar{\alpha}+\bar{\omega}\times(\bar{r}-\bar{r}_2), \tag{3}$$

где $\bar{r}_2$ — радиус-вектор центра тяжести второго тела O_2. Определим теперь перемещения $\bar{u}_1(\bar{r})$ и $\bar{u}_2(\bar{r})$, пользуясь методом Сомилиана. Обозначим через $\bar{u}_1'(\bar{r},\bar{r}')$ перемещение точки упругого пространства с радиусом-вектором $\bar{r}$ под действием приложенной в точке с радиусом-вектором $\bar{r}'$ единичной силы, направленной по оси x, а также силы и пары в точке O_1, удерживающих первую силу в равновесии. Пусть, далее, $\bar{u}_1''(\bar{r},\bar{r}')$ — перемещение, непрерывное в области, занимаемой первым телом, которому на поверхности первого тела соответствуют те же напряжения, что и перемещению $\bar{u}_1'(\bar{r},\bar{r}')$. Произвольные постоянные при определении этих перемещений должны быть найдены из того условия, что перемещения и соответствующие вращения исчезают в точке O_1. Направляя единичную силу по оси y и по оси z, найдем аналогичные перемещения $\bar{v}_1'(\bar{r},\bar{r}')$, $\bar{w}_1'(\bar{r},\bar{r}')$, $\bar{v}_1''(\bar{r},\bar{r}')$ и $\bar{w}_1''(\bar{r},\bar{r}')$. Тогда по Сомилиана

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(\bar{r})=\int_{S_1}\{\bar{i}\,p(\bar{r}')\cdot[\bar{u}_1'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{u}_1''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{j}\,p(\bar{r}')\cdot[\bar{v}_1'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{v}_1''(\bar{r},\bar{r}')]+\\+\bar{k}\,p(\bar{r}')\cdot[w_1'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{w}_1''(\bar{r},\bar{r}')]\}\,d\sigma+\\+\int\{\bar{i}\,p_1(\bar{r}')\cdot[\bar{u}_1'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{u}_1''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{j}\,p_1(\bar{r}')\cdot[\bar{v}_1'(\bar{r},\bar{r}')-\\-\bar{v}_1''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{k}\,p_1(\bar{r}')\cdot[\bar{w}_1'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{w}_1''(\bar{r},\bar{r}')]\}\,d\sigma.\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично определяя перемещение $\bar{u}_2(\bar{r})$ и подставляя найденные выражения для перемещений $\bar{u}_1(\bar{r})$ и $\bar{u}_2(\bar{r})$ в уравнение (3), получим следующее основное векторное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\{\bar{i}\,p(\bar{r}')\cdot\{\bar{u}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']-\bar{u}_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}+\bar{j}\,p(\bar{r}')\cdot\{\bar{v}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']-\\-\bar{v}_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}+\bar{k}\,p(\bar{r}')\cdot\{\bar{w}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']-\bar{w}_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}\}\,d\sigma+\\+\int_{S_2}\{\bar{i}\,p[\bar{\rho}(\bar{r}')]\cdot[\bar{u}_2'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{u}_2''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{j}\,p[\bar{\rho}(\bar{r}')]\cdot[\bar{v}_2'(\bar{r},\bar{r}')-\\-\bar{v}_2''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{k}\,p[\bar{\rho}(\bar{r}')]\cdot[\bar{w}_2'(\bar{r},\bar{r}')-\bar{w}_2''(\bar{r},\bar{r}')]\}\,d\sigma=\bar{F}(\bar{r}),\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{F}(\bar{r})=\bar{r}-\bar{\rho}(\bar{r})+\bar{\alpha}+\bar{\omega}\times(\bar{r}-\bar{r}_2)-\int\{\bar{i}\,p_1(\bar{r}')\cdot\{\bar{u}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']-\\-u_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}+\bar{j}\cdot p_1(\bar{r}')\cdot\{\bar{v}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}'),\bar{r}']-\bar{v}_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}+\\+\bar{k}\,p_1(\bar{r}')\cdot\{\bar{w}_1'[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']-\bar{w}_1''[\bar{\rho}(\bar{r}),\bar{r}']\}\}\,d\sigma+\int\{\bar{i}\,p_2(\bar{r}')\cdot[\bar{u}_2'(\bar{r},\bar{r}')-\\-\bar{u}_2''(\bar{r},\bar{r}')]+\bar{j}\,p_2(\bar{r}')\cdot[\bar{v}_2(\bar{r},\bar{r}')-\bar{v}_2''(\bar{r},\bar{r}')]+k\,p_2(\bar{r}')\cdot[\bar{w}_2'(\bar{r},\bar{r}')-\\-\bar{w}_2''(\bar{r},\bar{r}')]\}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Уравнения (5) и (2) определяют неизвестные функции $\overline{p}(\overline{r})$ и $\overline{\rho}(\overline{r})$, контур, ограничивающий поверхность давления, и постоянные $\overline{\alpha}$ и $\overline{\omega}$, а также содержат условия, которым должны удовлетворять заданные функции $\overline{p}_1(\overline{r})$ и $\overline{p}_2(\overline{r})$ для того, чтобы сжатые тела находились в равновесии. Кроме того заданные функции $\overline{p}_1(\overline{r})$ и $\overline{p}_2(\overline{r})$ должны быть таковы, чтобы угол между направлением давления в произвольной точке поверхности давления и направлением нормали к поверхности давления в этой точке не превосходил угла трения для сжимаемых тел.

Из полученных нами уравнений при соответствующих дополнительных гипотезах нетрудно получить уравнения Герца. Пусть

$$\int \overline{p}_1(\overline{r})\, d\sigma = -\overline{k}P, \qquad \int \overline{p}_2(\overline{r})\, d\sigma = \overline{k}P,$$

$$\int \overline{p}_1(\overline{r}) \times \overline{r}\, d\sigma = \int \overline{p}_2(\overline{r}) \times \overline{r}\, d\sigma = 0.$$

Чтобы получить приближенное решение задачи, положим: $\rho_x(\overline{r}) = x$, $\rho_y(\overline{r}) = \overline{y}$. Разность $\rho_z(\overline{r}) - z$ при соответствующем выборе направлений осей Ox и Oy может быть аппроксимирована суммой $Ax^2 + By^2$. Перемещение $\overline{u}_1(\overline{r})$ заменим приближенно перемещением соответствующей точки упругого верхнего полупространства, находящегося под действием давления $p_z\overline{k}$ на граничной плоскости.

Тогда $w'_{1z}(\overline{r}, \overline{r}') - w''_{1z}(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{\vartheta_1}{R}$, где R — расстояние между точками с радиусами-векторами $\overline{r}$ и $\overline{r}'$,

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)},$$

где λ_1 и μ_1 — упругие постоянные первого тела,

$$u_{1z} = \int\limits_G p_z (w'_{1z} - w''_{2z})\, d\sigma = \vartheta_1 \int\limits_G \frac{p_z d\sigma}{R},$$

где G — проекция поверхности S_1 на плоскость xy. Аналогично

$$u_{2z} = -\vartheta_2 \int\limits_G \frac{p_z d\sigma}{R}.$$

Проектируя векторы, входящие в уравнение (3), на ось z и пренебрегая поворотом $\overline{\omega}$, получаем уравнение Герца:

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \int\limits_G \frac{p_z d\sigma}{R} = \alpha_z - Ax^2 - By^2, \tag{6}$$

которое совместно с уравнением

$$\int\limits_G p_z\, d\sigma = P \tag{7}$$

определяет функцию p_z, область G и «сближение» α_z.

Поступило
26 VIII 1940