

## ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

**О.Н. Шабловский**

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

E-mail: shablovsky-on@yandex.by

**Аннотация.** Предмет исследования – волновое уравнение с источником в среде со слабой пространственной нелокальностью. Такое уравнение отличается от классического варианта наличием дополнительного члена, содержащего искомую функцию в виде частной производной четвертого порядка по пространственной координате. Выполнено преобразование независимых переменных, позволяющее строить точные частные решения в виде бегущих волн, которые генерирует источник, нелинейным образом зависящий от искомой функции. Скоростной режим бегущей волны (дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой) характеризуется числом Маха, равным отношению скорости перемещения волны к скорости распространения малых возмущений. Рассмотрена функция источника, аналогичная той, что применяется в классическом случае для двойного уравнения синус-Гордона. Решение имеет вид кинка, который соответствует двум состояниям равновесия системы «среда – источник». Установлена связь между параметрами источника и аналитической структурой кинка (область определения решения, знак наклона кинка и скорость его перемещения). Показано, что по отношению к безразмерному параметру нелокальности квадрат числа Маха есть функция монотонно возрастающая/убывающая для сверхзвукового/дозвукового скоростного режима. Вместе с тем по отношению к одному из параметров источника квадрат числа Маха – немонотонная функция, которая имеет минимум/максимум в сверхзвуковом/дозвуковом случаях. Соответствующие экстремальным режимам функции источников отличаются одна от другой инверсией областей, где эти функции положительны и отрицательны. Для уравнения синус-Гордона сопоставление классического и нелокального процессов показывает, что различаются не только области определения сравниваемых решений, но и скоростные режимы (дозвуковой – сверхзвуковой) движения кинков. В случае кубической нелинейности источника получены решения, представляющие собой слабый разрыв искомой функции либо уединенную волну. Рассмотрено кинк-решение, зависимость которого от волновой координаты определяется гиперболическим тангенсом. Выполнен сопоставительный анализ свойств полиномиальных (третьей и пятой степени) функций источников, генерирующих такую бегущую волну в классической и нелокальной средах.

*Ключевые слова:* нелокальность; кинк; дозвуковая и сверхзвуковая волна; уравнение Клейна–Гордона; кубическая нелинейность источника.

**Введение.** Волновое уравнение с источником имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \varepsilon \chi_1^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} = k_v(\tau),$$

где  $\tau$  – функция, характеризующая некоторое физическое свойство среды;  $t$  – время;  $x$  – декартова координата;  $w$  – скорость распространения малых возмущений;  $k_v(\tau)$  – функция источника;  $\varepsilon \chi_1^2$  – параметр слабой пространственной нелокальности, см. [1] и указанную там библиографию. В монографиях [2, 3] изложены прикладные аспекты задач о волновых процессах в пространственно нелокальных средах.

Для перехода к безразмерной формулировке применяем масштабы  $\tau_b, t_b$ :

$$\begin{aligned} (t/t_b) \rightarrow t, \quad [x/(wt_b)] \rightarrow x', \quad (\tau/\tau_b) \rightarrow \tau, \\ [(k_v t_b^2)/\tau_b] \rightarrow k_v, \quad [\varepsilon \chi_1^2 / (w^4 t_b^2)] \rightarrow (\varepsilon \chi^2). \end{aligned}$$

В результате получаем следующую форму записи нелокального волнового уравнения в пределе слабой нелокальности

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^4 \tau}{\partial (x')^4} = k_v(\tau). \quad (1)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем в (1) уравнение Клейна–Гордона, которое позволяет исследовать нелинейные волны различной физической природы [4, 5]. Современные результаты и библиография исследований нелинейных гиперболических уравнений с источниками даны в [6–9]. Набор известных в литературе точных решений нелинейного уравнения Клейна–Гордона представлен в [10].

Цель данной статьи – рассмотреть для нелокального уравнения (1) новые точные решения типа бегущей волны в среде с источником  $k_v(\tau)$ , имеющим синусную либо полиномиальную нелинейность.

**Преобразование волнового уравнения.** Уравнение (1) запишем в виде системы, определяющей две неизвестные функции  $\tau, \theta$ :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v, \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2}. \quad (2)$$

Обозначим  $\partial \tau / \partial x' = u$ ,  $\partial \tau / \partial t = v$ , и тогда (2) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x')^2} = k_v, \quad \theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x'}. \quad (3)$$

Выполним преобразование независимых переменных  $(x', t) \rightarrow (\tau, t)$ . Результатом вычислений является следующая форма записи уравнений (3) [11]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - u \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) = k_v, \quad (4)$$

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Рассмотрим автомодельный вариант  $u = u(\tau)$ ,  $v = v(\tau)$ , для которого  $v = -uM$ ,  $\tau = \tau(\zeta)$ ,  $\zeta = x' - Mt$ ,  $M \equiv \text{const}$ .

Скорость перемещения линии  $\zeta = \text{const}$  равна  $N = dx/dt$ . Число Маха  $M = N/w$  определяет дозвуковой ( $M^2 < 1$ ) либо сверхзвуковой ( $M^2 > 1$ ) скоростной режим. Уравнение (5) запишем в виде

$$\theta = \tau + \varepsilon \chi^2 \frac{dU}{d\tau}, \quad U = u^2/2,$$

подставим в (4) и в итоге получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[ U \left( M^2 - 1 - \varepsilon \chi^2 \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right) \right] - \varepsilon \chi^2 U \frac{d^3 U}{d\tau^3} = k_v. \quad (6)$$

Зависимость искомой функции  $\tau = \tau(\zeta)$  от волновой координаты  $\zeta$  определяется выражением

$$\frac{d\tau}{(2U)^{1/2}} = \pm d\zeta. \quad (7)$$

Обсудим частные примеры зависимостей  $U = U(\tau)$ , позволяющие проинтегрировать (7) в конечном виде и получить физически содержательные функции источника  $k_v(\tau)$ .

**Синусная нелинейность источника.** Обозначим  $\tau' = n\tau$ , где  $n$  – произвольная положительная константа. В формуле (7) возьмем знак «+». Пусть  $(2U)^{1/2} = A \cos \tau'$ ,  $A \equiv \text{const}$ . Решение типа кинк, описывающее переход между двумя состояниями равновесия системы «среда – источник», имеет вид

$$\tau' = -\frac{\pi}{2} \pm 2 \arctg [C_1 \exp(n\zeta A)], C_1 > 0, \zeta \in (-\infty, \infty); A, C_1 - \text{const.} \quad (8)$$

Здесь верхний знак «+» относится к области определения решения  $\tau' \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Наклон кинка положителен при  $A > 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (\pi/2)$ . Наклон отрицателен при  $A < 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ . Знак «-» перед арктангенсом в (8) относится к интервалу  $\tau' \in (-3\pi/2, -\pi/2)$ . Наклон этого кинка отрицателен при  $A > 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-3\pi/2)$ . Наклон положителен при  $A < 0$ :  $\zeta \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow (-3\pi/2)$ ;  $\zeta \rightarrow \infty, \tau' \rightarrow (-\pi/2)$ .

Данный процесс генерируется источником

$$k_v/n = k_2 \sin 2\tau' + k_4 \sin 4\tau'; k_2, k_4 - \text{const.} \quad (9)$$

При  $\varepsilon \neq 0$  свойства коэффициентов  $k_2, k_4$  и их связь с параметрами задачи состоят в следующем:

$$A^2 = \left(-4k_4/3\varepsilon\chi^2 n^2\right)^{1/2}, \varepsilon k_4 < 0; \quad (10)$$

$$M^2 = 1 + \frac{2}{A^2} \left(\frac{4}{3}k_4 - k_2\right). \quad (11)$$

Если  $k_2 < (4k_4/3)$ , то процесс сверхзвуковой. «Звуковое» решение  $M^2 = 1$  получаем при  $k_2 = 4k_4/3$ . Дозвуковой режим движения кинка наблюдается при

$$k_2 > (4k_4/3), \left(-k_4/3\varepsilon\chi^2\right) > \left[k_2 - (4k_4/3)\right]^2.$$

Последнее неравенство всегда будет выполнено при достаточно малом  $|\varepsilon|\chi^2$ .

Итак, порядок вычислений следующий. Заданные параметры  $k_2, k_4$  определяют скоростной режим движения кинка. Область определения решения соотносится с выбором знака «+» или «-» в (8). По формулам (10), (11) подсчитываем  $A^2, M^2$ . Посредством произвольной положительной константы  $C_1$  задаем начальное значение  $\tau'(\zeta = 0)$ . Далее указываем знак  $A$ , т. е. фиксируем знак наклона кинка. Выбор знака величины  $M$  указывает направление его движения.

Формулу (11) можно представить в виде  $M^2 = 1 + \varepsilon_1 [(4k_4/3) - k_2] \sqrt{3}$ , который позволяет проследить зависимость скорости движения кинка от параметра нелокальности среды  $\varepsilon_1 = (-\varepsilon\chi^2/k_4)^{1/2} > 0$ . А именно: в сверхзвуковом режиме  $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 > 0$ , в дозвуковом режиме  $\partial(M^2)/\partial\varepsilon_1 < 0$ .

Обсудим свойства функции источника (9), применяя выражение

$$k_v/n = \sin 2\tau'(k_2 + 2k_4 \cos 2\tau'), \tau' \in (-3\pi/2, \pi/2). \quad (12)$$

При всех скоростях движения  $k_v = 0$  там, где  $\sin 2\tau' = 0$ , т. е. при  $\tau' = -3\pi/2, -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2$ . Существование либо отсутствие других корней  $\tau' = \tau'_1$  уравнения  $k_v(\tau') = 0$  связано со знаком параметра  $\varepsilon\chi^2$  и со скоростным режимом  $M^2$ . Для сверхзвукового процесса корни вида  $\tau' = \tau'_1, k_v(\tau'_1) = 0$  существуют при следующих условиях: 1)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < (-k_2) < 2k_4, \cos 2\tau'_1 > 0$ ; 2)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < k_2 < 2k_4, \cos 2\tau'_1 < 0$ ; 3)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, (3k_2/4) < k_4 < (k_2/2) < 0, \cos 2\tau'_1 < 0$ . Для дозвукового процесса: 1)  $\varepsilon < 0, k_4 > 0, 0 < k_2 < 2k_4, \cos 2\tau'_1 < 0$ ; 2)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, 0 < k_2 < (-2k_4), \cos 2\tau'_1 > 0$ ; 3)  $\varepsilon > 0, k_4 < 0, (4k_4/3) < k_2 < 0, \cos 2\tau'_1 < 0$ .

Отметим немонотонную зависимость  $M^2$  от параметра источника  $k_4$ :  $\partial(M^2)/\partial k_4 = 0$ , если  $k_4 = (-3k_2/4)$ , т. е. функция (12) равна

$$k_v/n = 2k_4 \sin 2\tau' [\cos 2\tau' - (2/3)]. \quad (13)$$

В сверхзвуковом режиме имеем минимальное значение  $(M^2)_{\min}$  при  $k_4 > 0, \varepsilon < 0, k_2 = (-4k_4/3) < 0$ . В дозвуковом режиме максимальное значение  $(M^2)_{\max}$  достигается при  $k_4 < 0, \varepsilon > 0, k_2 = (-4k_4/3) > 0$ . Это значит, что соответствующие до- и сверхзвуковому режимам источники вида (13) отличаются один от другого инверсией областей  $k_v > 0$  и  $k_v < 0$ . На рис. 1 схематически показан пример такой инверсии для  $\cos 2\tau'_1 = 2/3, \tau'_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Отдельный вариант  $k_2 = 0$  (см. (9)–(11)) представляет собой точное решение (8) нелокально-го уравнения синус-Гордона, для которого

$$k_v/n = k_4 \sin 4\tau', \tau' = n\tau, n > 0, M^2 = 1 + (8k_4/3A^2). \tag{14}$$

Здесь  $A^2$  по-прежнему определяется формулой (10). Движение кинка дозвуковое при  $\varepsilon > 0, 0 < (-k_4) < [3/16\varepsilon\chi^2]$ . Сверхзвуковой режим имеем при  $\varepsilon < 0, k_4 > 0$ .

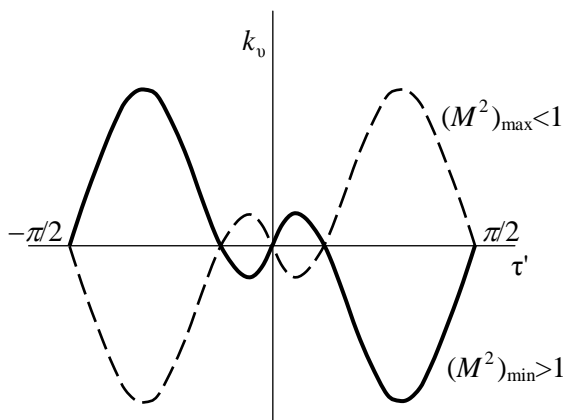


Рис. 1. Инверсия областей  $k_v > 0$  и  $k_v < 0$  для источников (13), соответствующих экстремальным скоростям движения кинка

Важный частный случай решения (8)–(11): если  $\varepsilon = 0$ , то  $k_4 = 0, A$  – произвольная постоянная, и функция (8) – это известное решение [4, 5] уравнения синус-Гордона,

$$k_v = nk_2 \sin(2n\tau), M^2 - 1 = (-2k_2/A^2). \tag{15}$$

Здесь  $M^2 > 1$ , если  $k_2 < 0; 0 < M^2 < 1$ , если  $0 < k_2 < (A^2/2)$ . Своеобразие ситуации в том, что аналитическая структура кинка (8) одинаковая для классической ( $\varepsilon = 0$ ) и нелокальной ( $\varepsilon \neq 0$ ) сред. Основные различия между этими процессами видны из формул для  $M^2$  в (14) и (15). Возьмем для наглядности одинаковые источники:

$$n_* = 2n_0 = 4n_\varepsilon, k_* = n_0 k_2 = n_\varepsilon k_4, n_0 > 0, n_\varepsilon > 0, \text{ т. е. } \text{sgn } k_2 = \text{sgn } k_4, k_v = k_* \sin(n_* \tau),$$

где нижние индексы «0» и «ε» относятся к классической и нелокальной средам соответственно. Тогда имеем

$$M_0^2 = 1 - 2k_2/A_0^2, M_\varepsilon^2 = 1 + 8k_4/(3A_\varepsilon^2).$$

Следовательно, различаются области определения решений и скоростные режимы (дозвуковой – сверхзвуковой) движения кинков.

**Кубическая нелинейность источника.** В формуле (7) применяем оба знака «±». Возьмем

$$(2U)^{1/2} = \tau(A_2 + A_3 \tau)^{1/2}; A_2, A_3 - \text{const} \tag{16}$$

и получим

$$\tau = \frac{4C_1 A_2 E}{A_3 (1 - C_1 E)^2}, E = \exp(\pm \zeta \sqrt{A_2}), \tag{17}$$

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = \pm \sqrt{A_2} \frac{4A_2 C_1 E (1 + C_1 E)}{A_3 (1 - C_1 E)^3}. \tag{18}$$

Величина  $\tau(\zeta = 0)$  зависит от выбора константы  $C_1 > 0$ .

Вариант 1: слабый разрыв. Пусть  $A_2 > 0, A_3 > 0, \tau > 0, 0 < C_1 < 1$ . Решение (17) содержит две ветви, смыкающиеся при  $\zeta = 0$  и образующие слабый разрыв функции  $\tau(\zeta)$ : при  $\zeta = 0$  терпит разрыв первого рода первая производная  $d\tau/d\zeta$ , см. верхнюю часть рис. 2. В формуле (18) знак «+» относится к левой ветви,  $\zeta \leq 0, E = \exp(\zeta\sqrt{A_2}), d\tau/d\zeta > 0$ ; знак «-» – для правой ветви,  $\zeta \geq 0, E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2}), d\tau/d\zeta < 0$ . Здесь  $\tau(\zeta = 0) > 0$  для обеих ветвей.

Если  $A_2 > 0, A_3 < 0, \tau < 0, C_1 > 1$ , то решение (17) содержит по-прежнему две ветви, образующие слабый разрыв, но меняется конфигурация этих ветвей, см. нижнюю половину рис. 2. В формуле (18) знак «-» относится к левой ветви:  $\zeta \leq 0, E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2}), d\tau/d\zeta < 0$ ; правая ветвь: знак «+»,  $\zeta \geq 0, E = \exp(\zeta\sqrt{A_2}), d\tau/d\zeta > 0$ . Здесь  $\tau(\zeta = 0) < 0$ .

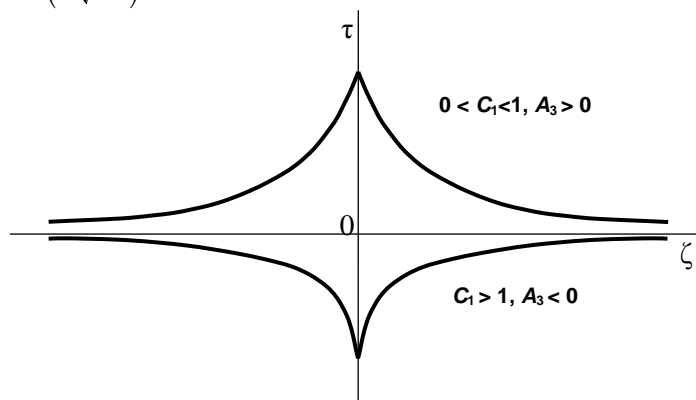


Рис. 2. Кубическая нелинейность источника (20): решение (17), содержащее слабый разрыв

Вариант 2: уединенная волна. В этом случае следует взять  $(-A_2) < A_3\tau < 0$ . Из (7), (16) после интегрирования получаем гладкое решение

$$\tau = \frac{-4A_2E}{A_3(1+E)^2}, E = \exp(\mp\zeta\sqrt{A_2}), A_2 > 0, \zeta = 0, d\tau/d\zeta = 0. \quad (19)$$

Формула (19) дает уединенные волны, различающиеся знаком функции  $\tau(\zeta)$ : 1)  $\tau > 0$  при  $A_3 < 0, E = \exp(-\zeta\sqrt{A_2}), \zeta \in (-\infty, \infty)$  (см. верхнюю часть рис. 3); 2)  $\tau < 0$  при  $A_3 > 0, E = \exp(\zeta\sqrt{A_2}), \zeta \in (-\infty, \infty)$  (см. нижнюю часть рис. 3).

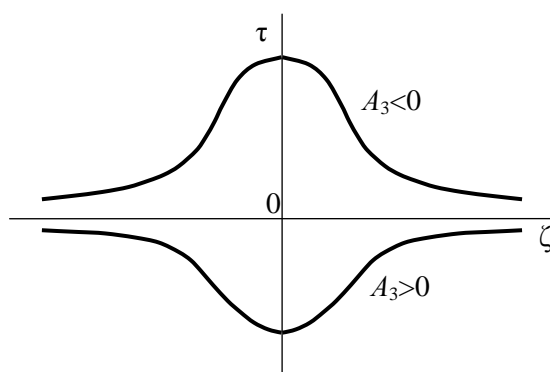


Рис. 3. Кубическая нелинейность источника (20): уединенная волна (19)

Волновые процессы, которые описываются решениями (17) и (19), вызваны воздействием источника

$$k_0 = k_1\tau + k_3\tau^3, k_1k_3 < 0, \quad (20)$$

для которого выполнены соотношения

$$A_2^2 = \frac{k_1}{4\varepsilon\chi^2} > 0, A_3^2 = -\frac{2k_3}{15\varepsilon\chi^2} > 0, M^2 = 1 + 5A_2\varepsilon\chi^2. \quad (21)$$

Напомним, что для всех рассмотренных здесь вариантов  $A_2 > 0$ . Следовательно, сверхзвуковой ( $M^2 > 1$ ) режим движения имеем для  $\varepsilon > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_3 < 0$ . Если  $k_1 < 0$ ,  $k_3 > 0$ ,  $0 < (-\varepsilon\chi^2) < [-4/(25k_1)]$ , то режим движения дозвуковой,  $M^2 \in (0, 1)$ . Функция (20) обращается в ноль в трех точках:  $\tau = 0$ ,  $\tau = \pm(-k_1/k_3)^{1/2}$ . Решения (17) и (19) содержат дробь  $A_2/A_3$ , которая определяется только свойствами источника:  $A_2^2/A_3^2 = (-15k_1/8k_3)$ . Информация о влиянии параметра нелокальности  $\varepsilon\chi^2$  заключена в показателе экспоненты  $\zeta\sqrt{A_2} = (x' - Mt)\sqrt{A_2}$ , где  $M^2 A_2 = A_2 + (5k_1/4)$ . Выбор знака константы  $A_3$  соответствует тому обстоятельству, что для слабого разрыва  $A_3\tau > 0$ , а для уединенной волны  $A_3\tau < 0$ .

Частный случай  $\varepsilon = 0$  дает тривиальное решение линейного однородного волнового уравнения:  $k_1 = 0$ ,  $k_3 = 0$ . Воздействие источника (20) обусловлено именно нелокальными ( $\varepsilon \neq 0$ ) свойствами среды.

**Источник – полином пятой степени.** В формуле (7) возьмем знак «+» и примем

$$(2U)^{1/2} = br \left( 1 - \frac{\tau^2}{b^2} \right); \quad b, r - \text{const.}$$

В результате вычислений получаем

$$\tau = b \operatorname{th}(r\zeta), \quad \tau \in (-b, b), \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \quad (22)$$

Тогда при  $\varepsilon \neq 0$  функция  $k_v(\tau)$  в (6) представляет собой полином, содержащий степени  $\tau$ ,  $\tau^3$  и  $\tau^5$  – запись не приводится. Если  $\varepsilon = 0$ , то член  $\tau^5$  отсутствует, и функция (22) – это известное [4, с. 640] кинковое решение, генерируемое источником

$$k_v = k_0 \tau \left( \frac{\tau^2}{b^2} - 1 \right), \quad M^2 - 1 = (k_0/2r^2). \quad (23)$$

Здесь  $k_0$ ,  $r$ ,  $b$  – свободные параметры. Скорость перемещения бегущей волны сверхзвуковая, если  $k_0 > 0$ ; скорость волны дозвуковая, если  $(-2r^2) < k_0 < 0$ . В нелокальном случае заслуживают внимания два частных примера, для которых  $k_v(\tau)$  содержит  $\tau$  и  $\tau^5$  либо  $\tau^3$  и  $\tau^5$ .

$$\text{I.} \quad k_v = k_1 \tau \left( 1 - \frac{\tau^2 \sqrt{2}}{b^2 \sqrt{3}} \right) \left( 1 + \frac{\tau^2 \sqrt{2}}{b^2 \sqrt{3}} \right), \quad r^4 = k_1 / (36\varepsilon\chi^2), \quad k_1\varepsilon > 0, \quad M^2 = 1 - 20r^2\varepsilon\chi^2. \quad (24)$$

Сверхзвуковой режим:  $\varepsilon < 0$ ,  $k_1 < 0$ . Дозвуковой режим:  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < k_1 < (0,09/\varepsilon\chi^2)$ .

$$\text{II.} \quad k_v = k_3 \tau^3 \left( 1 - \frac{2\tau^2}{3b^2} \right), \quad r^4 = k_3 b^2 / (36\varepsilon\chi^2), \quad k_3\varepsilon > 0, \quad M^2 = 1 - 2r^2\varepsilon\chi^2. \quad (25)$$

Сверхзвуковой режим:  $\varepsilon < 0$ ,  $k_3 < 0$ . Дозвуковой режим:  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < k_3 b^2 < (9/\varepsilon\chi^2)$ .

Сравним классический вариант (23) с источниками (24), (25), воздействие которых обусловлено нелокальными свойствами среды,  $\varepsilon \neq 0$ . Для представленных примеров одной и той же аналитической структуре кинка (22) соответствуют функции источника (23), (24) и (25), различающиеся степенями  $\tau$  в отдельных слагаемых  $[(\tau, \tau^3); (\tau, \tau^5); (\tau^3, \tau^5)]$ , но имеющие одинаковое число ненулевых действительных корней вида  $\tau = \tau_1$ ,  $k_v(\tau_1) = 0$ . Эти корни, соответственно, такие:  $\pm b$ ;  $\pm b(3/2)^{1/4}$ ,  $\pm b(3/2)^{1/2}$ .

**Заключение.** Получены точные частные решения нелокального волнового уравнения (1) с источниками. Для синусной нелинейности (9) источника построено кинк-решение (8). Его частным случаем является точное решение (8), (10), (14) нелокального уравнения синус-Гордона. В случае кубической нелинейности (20) указаны зависимости, которые описывают слабый разрыв (17) либо уединенную волну (19). Даны примеры (14), (15) и (23)–(25) сопоставления свойств классической и нелокальной сред. Определены условия существования дозвуковых и сверхзвуковых режимов распространения бегущих волн.

### Литература

1. Алфимов, Г.Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности / Г.Л. Алфимов // *Нелинейная динамика*. – 2009. – Т. 5, № 4. – С. 585–602.
2. Браун, О.М. Модель Френкеля-Конторовой / О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. – М.: Физматлит, 2008. – 519 с.
3. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
4. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
5. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
6. Кузнецова, М.Н. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна–Гордона / М.Н. Кузнецова // *Уфимский математический журнал*. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 86–103.
7. Копылова, Е.А. Асимптотическая устойчивость солитонов для нелинейных гиперболических уравнений / Е.А. Копылова // *Успехи математических наук*. – 2013. – Т. 68, Вып. 2 (410). – С. 91–144.
8. Аэро, Э.Л. Решения уравнений синус-Гордон с переменной амплитудой / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // *Теоретическая и математическая физика*. – 2015. – Т. 184, № 1. – С. 79–91.
9. Корпусов, М.О. Аналитико-численное исследование вопроса о разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Клейна–Гордона / М.О. Корпусов, А.Н. Левашов, Д.В. Лукьяненко // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2020. – Т. 60, № 9. – С. 1503–1512.
10. Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 431 с.
11. Шабловский, О.Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками / О.Н. Шабловский // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 51–61. DOI: 10.14529/mmph200406.

*Поступила в редакцию 14 февраля 2023 г.*

### Сведения об авторе

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь, e-mail: shablovsky-on@yandex.by.

---

**Bulletin of the South Ural State University  
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”  
2023, vol. 15, no. 4, pp. 30–37**

---

DOI: 10.14529/mmph230404

## EXAMPLES OF EXACT SOLUTIONS OF THE NON-LOCAL WAVE EQUATION WITH NONLINEAR SOURCES

### *O.N. Shablovskii*

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus*

*E-mail: shablovsky-on@yandex.by*

Abstract. The scope of the study is a wave equation with a source in a medium with weak spatial nonlocality. The equation is distinguished by an additional term containing the function sought as a fourth order partial derivative of the spatial coordinate. The transformation of independent variables enables the construction of accurate partial solutions in the form of waves generated by a nonlinear source which depend on the desired function. The velocity regime of the wave (subsonic, sonic, supersonic) is characterized by the Mach number equal to the ratio of the velocity of the wave to the propagation ve-

locity of small perturbations. A source function similar to the classical case for the double sine-Gordon equation is considered. A kink solution corresponds to two equilibrium states of the medium-source system. The relation between the source and the kink structure (the area of the solution, the sign of the kink obliquity, and the velocity of its movement) has been established. It is shown that in relation to the dimensionless parameter of nonlocality, the square of the Mach number is a monotonic increasing/decreasing function for the supersonic/subsonic velocity mode. In relation to one of the source parameters, the square of the Mach number is a non-monotonic function with a minimum/maximum in the supersonic/subsonic cases. The source functions corresponding to the extreme modes differ from each other by the inversion of the areas where these functions are positive and negative. For the sine-Gordon equation, the comparison of the classical and nonlocal processes are different not only in the areas of the solutions, but also in the velocity modes (subsonic/supersonic) of the motion of the kink. The cubic nonlinearity of the source gives solutions representing a weak discontinuity of the function sought or a solitary wave. A kink solution depends on the wave coordinate and is determined by a hyperbolic tangent. The paper provides a comparative analysis of the properties of the polynomial (third and fifth degree) functions of sources generating a wave in classical and nonlocal media.

*Keywords:* nonlocality; kink; subsonic and supersonic wave; Klein–Gordon equation; cubic nonlinearity of the source.

### References

1. Alfimov G.L. Nonlocal Sine-Gordon Equation: Kink Solutions in the Weak Nonlocality Limit. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2009, Vol. 5, no. 4, pp. 585–602. DOI: 10.20537/nd0904010
2. Braun O.M., Kivshar Y.S. *The Frenkel–Kontorova Model*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, 472 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10331-9
3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer, 2001, 462 p.
4. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London, Academic Press Inc., 1984, 630 p.
5. Tabor M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics*. New York etc., Wiley, Cop., 1989, 364 p.
6. Kuznetsova M.N. On Nonlinear Hyperbolic Differential Equations Related to the Klein–Gordon Equation by Differential Substitutions. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, Vol. 4, Iss. 3, pp. 86–103. (in Russ.).
7. Kopylova E.A. Asymptotic Stability of Solitons for Nonlinear Hyperbolic Equations. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, Vol. 68, no. 2, pp. 283–334. DOI: 10.1070/RM2013v068n02ABEH004830
8. Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu.V. Solutions of the Sine-Gordon Equation with Variable Amplitude. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, Vol. 184, no. 1, pp. 961–972. DOI: 10.4213/tmf8821.
9. Korpusov M.O., Levashov A.N., Lukyanenko D.V. Analytical-Numerical Study of Finite-Time Blow-Up of the Solution to the Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Klein–Gordon Equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, no. 9, pp. 1452–1460. DOI: 10.1134/S0965542520090109
10. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: Tochnye resheniya* (Handbook of Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Exact Solutions). Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 431 p. (in Russ.).
11. Shablovskiy O.N. Dynamics of Unstable Solutions for the Wave Equation with Sources. *Bulletin of SUSU. The series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, no. 4, pp. 51–61. DOI: 10.14529/mmph200406

Received February 14, 2023

### Information about the author

Shablovskii Oleg Nikiforovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus, e-mail: shablovsky-on@yandex.by.