Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Г. ПЕВНЫЙ

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И ФУНКЦИЙ WHITTAKER'а

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 V 1940)

В своей статье «On Sonine's polynomials» проф. Н. С. Кошляков [1] дал следующее функциональное равенство:

$$L_n^{(\alpha+\rho)}(z)=\frac{\Gamma(n+\alpha+\rho+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(\rho)}\int\limits_0^1 y^\alpha(1-y)^{\rho-1}L_n^{(\alpha)}(zy)\,dy, \tag{1}$$

$$R(\alpha)>-1,\quad R(\rho)>0,$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ есть полином Сонина или обобщенный полином Laguerre'a:

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}).$$

Задача настоящей заметки дать аналогичные соотношения для обобщенных гипергеометрических рядов и функций Whittaker'a.

Рассмотрим обобщенный гипергеометрический ряд:

$${}_pF_q\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p; \\ b_1, b_2, \dots, b_q;\end{matrix}\; z\right\}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+s)\dots\Gamma(a_p+s)\,\Gamma(b_1)\dots\Gamma(b_q)}{s!\,\Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_p)\,\Gamma(b_1+s)\dots\Gamma(b_q+s)}z^s$$

($p\leqslant q+1$; b_i не равно целому отрицательному числу или нулю).

Пусть P означает контур в комплексной плоскости, начинающейся в некоторой точке на вещественной оси между нулем и единицей, обходящий точки 0 и 1 в порядке $(1+, 0+, 1-, 0-)$ и возвращающийся в исходную точку.

Тогда имеет место следующее функциональное равенство:

$$\begin{aligned}{}_pF_q&\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p; \\ b_1, b_2, \dots, b_q;\end{matrix}\; z\right\}=\\ =\frac{\Gamma(b_1)\,\Gamma(1-b_1^*)\,\Gamma(1+b_1^*-b_1)}{-4\pi^2}&\int\limits_P(-t)^{b_1^*-1}(t-1)^{b_1-b_1^*-1}\times\\ &\times{}_pF_q\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p; \\ b_1^*, b_2, \dots, b_q;\end{matrix}\; tz\right\}dt.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и ниже предполагается, что в начальной точке $\arg(-t)=\arg(t-1)=-\pi$.

В предположении, что ни a_1, ни a_1^* не равны целому отрицательному числу или нулю, мы получаем

$$
{}_pF_q\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p; \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; \end{matrix}\; z\right\} =
$$

$$
= \frac{\Gamma(a_1^*)\,\Gamma(1-a_1)\,\Gamma(1-a_1^*+a_1)}{-4\pi^2}\int\limits_P (-t)^{a_1-1}(t-1)^{a_1^*-a_1-1}\times
$$

$$
\times\, {}_pF_q\left\{\begin{matrix} a_1^*, a_2, \ldots, a_p; \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; \end{matrix}\; zt\right\} dt. \tag{3}
$$

Так как

$$
L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}\,{}_1F_1\left\{\begin{matrix} -n; \\ \alpha+1; \end{matrix}\; z\right\},
$$

то из равенства (2) следует:

$$
L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(-\alpha^*)\,\Gamma(1+\alpha^*)\,\Gamma(1+\alpha^*-\alpha)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{-4\pi^2\Gamma(n+\alpha^*+1)}\times
$$

$$
\times\int\limits_P (-t)^{\alpha^*}(t-1)^{\alpha-\alpha^*-1}L_n^{(\alpha^*)}(zt)\,dt,
$$

откуда нетрудно вывести равенство (1).

В другом частном случае для обычного гипергеометрического ряда

$$
F(\alpha, \beta; \gamma; z) \equiv {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \alpha, \beta; \\ \gamma; \end{matrix}\; z\right\}
$$

мы получаем:

$$
F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma^*)\,\Gamma(1+\gamma^*-\gamma)}{-4\pi^2}\times
$$

$$
\times\int\limits_P (-t)^{\gamma^*-1}(t-1)^{\gamma-\gamma^*-1}F(\alpha, \beta; \gamma^*; zt)\,dt, \tag{2'}
$$

$$
F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\alpha^*)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha^*+\alpha)}{-4\pi^2}\times
$$

$$
\times\int\limits_P (-t)^{\alpha-1}(t-1)^{\alpha^*-\alpha-1}F(\alpha^*, \beta; \gamma; zt)\,dt. \tag{3'}
$$

Формула (2′) дана недавно Erdélyi [2].

Равенства (2), (3) дают целый ряд частных формул. Так, например, при $p=q$ получаем:

$$
{}_qF_q\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_q; \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; \end{matrix}\; z\right\} = \prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\,\Gamma(b_i-a_i)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\cdots
$$

$$
\cdots\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{q} t_i^{a_i-1}(1-t_i)^{b_i-a_i-1}e^{t_1t_2\ldots t_qz}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_q, \tag{4}
$$

$$
R(a_i) > 0, \quad R(b_i-a_i) > 0.
$$

При $p=q+1$

$$
{}_{q+1}F_q\left\{\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_q, a_{q+1}; \\ b_1, b_2, \ldots, b_q; \end{matrix}\; z\right\} = \prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\,\Gamma(b_i-a_i)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\cdots
$$

$$
\cdots\int\limits_0^1\prod_{i=1}^{q} t_i^{a_i-1}(1-t_i)^{b_i-a_i-1}(1-t_1t_2\ldots t_qz)^{-a_{q+1}}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_q, \tag{5}
$$

$$
R(a_i) > 0, \quad R(b_i-a_i) > 0.
$$

В зависимости от того, какой из верхних параметров принят за a_{q+1}, получим $q+1$ различных формул вида (5).

Следствием из (3) является:

$$e^{\frac{z}{2}} W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k+k'\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k+k'\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\Gamma(k')} \times$$

$$\times \int_0^1 y^{-k-1}(1-y)^{k'-1} e^{\frac{zy}{2}} W_{k-k',m}(zy)\,dy, \qquad (6)$$

$$R\left(\frac{1}{2} \pm m - k\right) > 0, \quad R(k') > 0,$$

где $W_{k,m}(z)$ — функция Whittaker'a ([3]).

Подобный результат получаем, исходя из асимптотического разложения $W_{k,m}(z)$, а именно:

$$e^{\frac{z}{2}} W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma\left(m-k+\frac{1}{2}+2\delta\right)}{\Gamma\left(m-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\delta)} \times$$

$$\times z^{\delta} \int_0^1 y^{m-\frac{1}{2}-\delta}(1-y)^{2\delta-1} e^{\frac{z}{2y}} W_{k-\delta,m+\delta}\left(\frac{z}{y}\right) dy \qquad (7)$$

при

$$R(\delta) > 0, \quad R\left(m-k+\frac{1}{2}\right) > 0, \quad R(m) \geqslant 0, \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi, \quad z \neq 0.$$

Доказательство последнего равенства, несколько сложное, будет дано в другом месте.

Псковский педагогический институт

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. S. Koshliakov, Messenger of Math., IV, 155 (1926). [2] A. Erdélyi, Quarterly Journ. of Math., Oxford, ser. 8, 200—213 (1937); 10, 129—134 (1939). [3] Уиттекер и Ватсон, Курс совр. анализа, ч. 2, гл. 16 (1934).