Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Г. ПЕВНЫЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ WHITTAKER'а

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IV 1940)

Настоящая заметка касается асимптотического разложения

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s!\,\Gamma(\alpha-s)\,(-z)^s},$$

имеющего место при $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ и где $\alpha = m - k + \frac{1}{2}$, $\beta = m + k + \frac{1}{2}$, а $M_{k,m}(z)$ есть известная функция Whittaker'а (1).

Обобщая работу В. Г. Строганова (2) об асимптотическом разложении функции Bessel'я $J_\nu(z)$ при чисто мнимом аргументе, рассмотрен остаточный член

$$R_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s!\,\Gamma(\alpha-s)\,(-z)^s}$$

при $z > 0$, исключая тривиальный случай, когда рассматриваемый асимптотический ряд обрывается.

При вещественных α и β и при $n > n_0$, где n_0 — наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$n_0 > \max(-\beta, \alpha - 1),$$

уравнение относительно z

$$R_n(z) = 0$$

имеет корень.

Для этого корня найдена следующая асимптотическая формула:

$$z_n = n + g(\alpha)\sqrt{n} + B_0 + \frac{B_1}{\sqrt{n}} + \frac{B_2}{n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

где

$$B_0 = -\frac{2}{3} + \beta - \alpha + \frac{1}{3} g^2,$$

$$B_1 = \left(-\frac{11}{36} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) g + \frac{1}{36} g^3,$$

$$B_2 = \left(\frac{8}{405} + \alpha - \alpha\beta\right) + \frac{7}{810} g^2 - \frac{1}{270} g^4$$

и величина $g = g(\alpha)$ определяется уравнением

$$\int_0^g e^{\frac{t^2}{2}}\, dt = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}\pi\alpha.$$

Попутно для $R_n(z)$ найдено интегральное представление:

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-n)\, z^{n-1}} \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(x+1)^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-1-\alpha} \cos\{z(1+$$
$$+x)\operatorname{tg} t - (n+1-\alpha)t - \pi\alpha\}\, dt,$$

действительное при $z > 0$, $R(n-\alpha) > 0$, $0 < R(\beta) < 1$.

Определяя $R_n(z)$ его интегральным представлением и считая n непрерывной вещественной переменной, мы получим, что при достаточно больших z уравнение относительно n

$$R_n(z) = 0$$

имеет корень, определяемый формулой:

$$n_z = z - g\sqrt{z} - \left(B_0 - \frac{1}{2}g^2\right) - \left(B_1 - \frac{1}{2}gB_0 + \frac{1}{8}g^3\right)\frac{1}{\sqrt{z}} -$$
$$- \left[B_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g\right)B_1 - \frac{1}{4}gB_0 + \frac{1}{16}g^3\right]\frac{1}{z} + 0\left(z^{-\frac{3}{2}}\right),$$

где g, B_0, B_1, B_2 имеют вышеприведенное значение.

Если $n_z = N + \theta$, где N — целое число и $0 \leqslant \theta < 1$, то $R_N(z)$ или $R_{N+1}(z)$ дает минимальное значение $R_n(z)$ по абсолютной величине при всех $n \geqslant n_0 - 1$.

Полагая $\alpha = \beta = \nu + \frac{1}{2}$, получаем результат В. Г. Строганова ([2]) для $J_\nu(iz)$.

Для случая $J_0(iz)$ вопрос о корне остаточного члена исследован впервые Stieltjes'ом ([3]).

Псковский педагогический институт

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, гл. 16 (1934). [2] W. Stroganoff, Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова, IX, стр. 222—233 (1935). [3] Th. Stieltjes, Annales scien. de l'École normale supérieure, 3, 201—262 (1886).