Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

О ПЛОСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 V 1940)

В настоящей статье мы рассматриваем следующую задачу. В плоскости xy определена гармоническая функция вида

$$\alpha_0 \ln r + \sum_{m=2}^{n} \frac{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi}{r^m}, \tag{1}$$

являющаяся внешним логарифмическим потенциалом некоторой массы M с постоянной плотностью μ. Требуется отыскать область G, заполненную массой M.

Решение этой задачи можно рассматривать, как приближенное решение плоской обратной задачи теории потенциала, так как произвольный заданный внешний логарифмический потенциал $V(r, \varphi)$ при надлежащем выборе начала полярных координат r, φ может быть аппроксимирован суммой (1) вне круга с центром в начале координат, целиком содержащего все особые точки функции V кроме бесконечно удаленной. Поставленная нами задача сводится к решению интегрального уравнения:

$$\iint_G \mu \ln R \, d\sigma = \alpha_0 \ln r + \sum_{m=2}^{n} \frac{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi}{r^m}. \tag{2}$$

Будем искать односвязную область G, для которой уравнение (2) удовлетворяется вне этой области, наложив на искомую область следующее дополнительное ограничение. Будем считать, что центр тяжести области G расположен внутри G. Определенный интеграл, стоящий в левой части уравнения (2), может быть разложен в ряд:

$$\iint_G \mu \ln R \, d\sigma = \ln r \iint_G \mu \, d\sigma - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\cos m\varphi}{mr^m} \iint_G \mu r'^m \cos m\varphi' d\sigma + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin m\varphi}{mr^m} \iint_G \mu r'^m \sin m\varphi' d\sigma \right), \tag{3}$$

сходящийся вне круга $r < \rho$, целиком содержащего область G.

Подставляя (3) в (2), получаем следующие необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять искомая область G:

$$\iint_G \mu\, d\sigma = \alpha_0, \quad \iint_G \mu r' \cos\varphi'\, d\sigma = \iint_G \mu r' \sin\varphi'\, d\sigma = 0,$$

$$\iint_G \mu r'^m \cos m\varphi'\, d\sigma \begin{cases} -m\alpha_m & (m = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & (m = n+1, n+2, \ldots), \end{cases}$$

$$\iint_G \mu r'^m \sin m\varphi'\, d\sigma \begin{cases} -m\beta_m & (m = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & (m = n+1, n+2, \ldots). \end{cases}$$

Этим условиям можно придать вид:

$$\iint_G z^m\, d\sigma = c_m \; (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где $z = r'e^{i\varphi'}$, $c_0 = \frac{\alpha_0}{\mu}$, $c_1 = 0$, $c_m \begin{cases} -\frac{m}{\mu}(\alpha_m + i\beta_m) \; (m = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 \; (m = n+1, n+2, \ldots). \end{cases}$

Второе из условий (4) свидетельствует о том, что центр тяжести области G расположен в начале координат и, следовательно, начало координат расположено внутри области G. Таким образом существует и притом единственная аналитическая функция $f(\zeta)$, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 0, \; f'(0) > 0 \tag{5}$$

и отображающая единичный круг $|\zeta| < 1$ на область G.

Производя в кратных интегралах, входящих в условия (4), замену переменных, можем придать условиям (4) вид:

$$\iint_\Sigma f^m(\zeta) f'(\zeta) \overline{f'(\zeta)}\, d\sigma = c_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где Σ — круг $|\zeta| < 1$.

Таким образом отыскание области G эквивалентно построению однолистной, голоморфной в единичном круге $|\zeta| < 1$ функции $f(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6). Будем искать функцию $f(\zeta)$ в виде полинома

$$f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{n+1}\zeta^{n+1} \; (a_1 > 0). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и замечая, что

$$\iint_\Sigma \zeta^m \bar{\zeta}^n\, d\sigma \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{\pi}{m+1} & (n = m), \end{cases} \tag{8}$$

находим, что при $m > n$ условия (6) удовлетворяются при любых значениях коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Действительно, в выражении $f^m(\zeta) f'(\zeta)$ наименьшая степень ζ равна m, а в выражении $\overline{f'(\zeta)}$ наибольшая степень $\bar{\zeta}$ равна n. Первые же $n+1$ из условий (6) удовлетворяются, если коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^{n+1}\bar{a}_{n+1} = \frac{1}{\pi} c_n, \\ a_1^n \bar{a}_n + (n+1) a_1^{n-1} a_2 \bar{a}_{n+1} = \frac{1}{\pi} c_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + (n+1) a_{n+1}^2 = \frac{1}{\pi} c_0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Разделяя в уравнениях (9) вещественные и мнимые части, получим систему $2n+1$ алгебраического уравнения для определения коэффициентов искомого полинома. Так мы найдем столько решений уравнения (2), соответствующих наложенным на область G ограничениям, сколько существует однолистных полиномов (7), удовлетворяющих условиям (9). Этими решениями исчерпываются все решения уравнения (2) среди односвязных областей, получаемых отображением единичного круга посредством целой рациональной функции, удовлетворяющей условиям (5). Действительно, будем искать функцию $f(\zeta)$ в виде полинома:

$$f(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots+a_m\zeta^m \quad (a_1>0,\ m>n+1). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), найдем, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ должны удовлетворять m условиям, среди которых будет уравнение: $a_1^m\bar{a}_m=0$. Так как $a_1>0$, $a_m=0$. Если $m>n+2$, то, исключая из остальных уравнений коэффициент a_m, получим $m-1$ условие, содержащее уравнение: $a_1^{m-1}\bar{a}_{m-1}=0$. Отсюда следует, что $a_{m-1}=0$, и т. д. Так. обр., чтобы полином (10) удовлетворял поставленным условиям, необходимо, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условиям (9) и условию

$$a_{n+2}=a_{n+3}=\ldots=a_m=0. \tag{11}$$

Пример. В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$\iint_G \ln R\,d\sigma=\pi\ln r+\frac{\pi\lambda\cos 2\varphi}{2r^2}. \tag{12}$$

Система (9) в этом случае имеет вид:

$$a_1^3\bar{a}_3=-\lambda,\quad a_1^2\bar{a}_2+3a_1a_2\bar{a}_3=0,\quad a_1^2+2a_2^2+3a_3^2=1. \tag{13}$$

Система (13) приводится к виду:

$$a_1^8-a_1^6+3\lambda^2=0,\quad a_2=0,\quad a_3=-\frac{\lambda}{a_1^3}. \tag{14}$$

При $|\lambda|>\frac{3}{16}$ все корни уравнения для a_1^2 комплексные, при $0<|\lambda|<\frac{3}{16}$ это уравнение имеет два действительных положительных корня, из которых один заключен внутри интервала $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, второй — внутри интервала $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$. Из двух соответствующих полиномов однолистным будет лишь полином, соответствующий большему из указанных корней. Таким образом при $|\lambda|>\frac{3}{16}$ изложенным в настоящей статье приемом мы не находим решения уравнения (12), при $0\leqslant|\lambda|\leqslant\frac{3}{16}$ мы находим одно решение этого уравнения, представляющее собой область, ограниченную кривой:

$$x=a_1\cos t-\frac{\lambda}{a_1^3}\cos 3t,\quad y=a_1\sin t-\frac{\lambda}{a_1^3}\sin 3t, \tag{15}$$

где a_1 — наибольший из действительных корней уравнения $a_1^8-a_1^6+3\lambda^2=0$. Эта область звездна относительно своего центра тяжести и согласно критерию, указанному П. Новиковым (ДАН, XVIII, № 3, 1938), является единственной звездной относительно своего центра тяжести областью, удовлетворяющей уравнению (12). При предельных значениях параметра λ $\left(\lambda=\pm\frac{3}{16}\right)$ кривая (15) обращается в контуры

$$x=\frac{\sqrt{3}}{6}(3\cos t\mp\cos 3t),\quad y=\frac{\sqrt{3}}{6}(3\sin t\mp\sin 3t) \tag{16}$$

с угловыми точками.

Институт математики
Академии Наук УССР

Поступило
26 V 1940