Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. И. МАРКУШЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 V 1940)

1. Пусть P — точка n-мерного евклидова пространства и $\{\Gamma_\lambda(P)\}$ $(0<\lambda<\infty)$ — семейство замкнутых жордановых гиперповерхностей (этим термином мы обозначаем многообразия, гомеоморфные границе n-мерного шара), содержащих P внутри. Обозначая через $R_\lambda(P)$ и $r_\lambda(P)$ максимум и минимум расстояний точек $\Gamma_\lambda(P)$ от точки P, мы будем предполагать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} R_\lambda(P)=0. \tag{1}$$

Число

$$k(P)=\varliminf_{\lambda\to\infty}\frac{r_\lambda(P)}{R_\lambda(P)} \tag{2}$$

будем называть *коэффициентом эксцентричности семейства* $\Gamma_\lambda(P)$ *относительно точки* P.

2. Теорема. Пусть G — область n-мерного евклидова пространства и $P'=f(P)$ — определенная и непрерывная в ней функция, значения которой P' представляются точками того же пространства. Пусть $f(P)$ обладает следующими свойствами:

а) Почти для каждой точки P_0 области G (т. е. исключая, быть может, множество n-мерной меры нуль) существует окрестность $U(P_0)$, в разных точках которой $f(P)$ принимает разные значения:

$$f(P_1)\neq f(P_2),\ \text{если}\ P_1\neq P_2,\ P_1\in U(P_0)\ \text{и}\ P_2\in U(P_0).$$

[Это свойство выражает *локальную унивалентность* $f(P)$.]

б) Почти для каждой точки P_0 в соответствующей окрестности $U(P_0)$ существует последовательность гиперповерхностей $\{\Gamma_i(P_0)\}$, удовлетворяющая условию:

$$\varliminf_{i\to\infty}\frac{r_{i+1}(P_0)}{r_i(P_0)}>0 \tag{3}$$

с положительным относительно P_0 коэффициентом эксцентричности $k(P_0)$:

$$\varliminf_{i\to\infty}\frac{r_i(P_0)}{R_i(P_0)}=k(P_0)>0, \tag{4}$$

которую $P'=f(P)$ преобразует в последовательность $\{\Gamma_i'(P_0')\}$, обладающую относительно $P_0'=f(P_0)$ также положительным коэффициентом эксцентричности $k'(P_0')$:

$$\varliminf_{i\to\infty}\frac{r_i'(P_0')}{R_i'(P_0')}=k'(P_0')>0. \tag{5}$$

Тогда функция $P'=f(P)$ почти всюду в области G имеет полный дифференциал в смысле Штольца (т. е. каждая из n координат точки P', рассматриваемая как функция координат точки P, обладает почти для всех точек P области G дифференциалом в смысле Штольца).

3. Для доказательства используем прием, примененный с аналогичной целью в одной из работ Д. Е. Меньшова ([1]). Покажем сначала, что для $f(P)$ почти всюду в области G выполняется соотношение:

$$\overline{\lim_{P\to P_0}}\frac{|f(P)-f(P_0)|}{|P-P_0|}<\infty. \tag{6}$$

[Здесь и дальше $|Q_2-Q_1|$ обозначает расстояние точек Q_2 и Q_1.] Допустив противное, предположим, что существует множество E_1 точек области G с положительной внешней мерой, на котором

$$\overline{\lim_{P\to P_0}}\frac{|f(P)-f(P_0)|}{|P-P_0|}=\infty \ (P_0\in E_1,\ P\in G). \tag{7}$$

В силу условия а) пункта 2 область G можно рассматривать как сумму счетной системы окрестностей U, в которых $f(P)$ унивалентна, и, кроме того, некоторого множества меры нуль. Поэтому по крайней мере одна из окрестностей U содержит часть E_2 множества E_1, имеющую положительную внешнюю меру. Область U', на которую $f(P)$ топологически отображает область U, можно считать ограниченной (уменьшая U в случае необходимости). Кроме того в силу условия б) пункта 2 существует такое положительное, меньшее единицы число $\varkappa$ и такое множество $E, E\subset E_2$ с положительной внешней мерой, что для точки $P_0, P_0\subset E$ выполняется условие б'): Последовательность гиперповерхностей $\{\Gamma_i(P_0)\}$ с коэффициентом эксцентричности $k(P_0)>\varkappa$ преобразуется посредством $P'=f(P)$ в последовательность $\{\Gamma_i'(P_0')\}$ с коэффициентом эксцентричности $k'(P_0')>\varkappa$. При этом

$$\underline{\lim_{i\to\infty}}\frac{r_{i+1}(P_0)}{r_i(P_0)}>\varkappa.$$

Заменяя, в случае необходимости, последовательность $\{\Gamma_i(P_0)\}$ некоторой ее подпоследовательностью, мы можем считать, что

$$\frac{2}{\varkappa}>\frac{r_{i+1}(P_0)}{r_i(P_0)}>\frac{\varkappa}{2},\ (i=1,2,3,\ \ldots), \tag{8}$$

$$\frac{r_i(P_0)}{R_i(P_0)}>\frac{\varkappa}{2},\quad \frac{r_i'(P_0')}{R_i'(P_0')}>\frac{\varkappa}{2}\ (i=1,2,3,\ldots) \tag{9}$$

[здесь $P_0\in E$ и $P_0'=f(P_0)$].

Пусть теперь N — произвольное положительное число. В силу (7) для каждой точки P_0 множества E существует зависящая от N последовательность точек $\{\Pi_i(P_0)\}$, сходящаяся к P_0 и такая, что

$$\frac{|f[\Pi_i(P_0)]-f(P_0)|}{|\Pi_i(P_0)-P_0|}>N. \tag{10}$$

Извлечем из $\{\Gamma_i(P_0)\}$ подпоследовательность $\{\Gamma_{i_j}(P_0)\}$, составленную из таких гиперповерхностей, что $\Gamma_{i_j}(P_0)$ либо проходит через некоторые точки $\Pi_i(P_0)$, либо не проходит ни через одну из них, но такого рода точки содержатся одновременно внутри нее и вне одной из гиперповерхностей $\Gamma_{i_{j\pm1}}(P_0)$ с соседним номером. Очевидно, что таких гиперповерхностей будет бесконечное множество [так как $\Pi_i(P_0)\to P_0$ при $i\to\infty$ и $\lim\limits_{i\to\infty}R_i(P_0)=0$]. Для $\Gamma_{i_j}(P_0)$ и для каждой точки Π, связанной с $\Gamma_{i_j}(P_0)$ указанным образом [т. е. $\Pi\in\{\Pi_i(P_0)\}$ и либо лежит на $\Gamma_{i_j}(P_0)$, либо содержится внутри $\Gamma_{ij}(P_0)$ и вне одной из гиперповерхностей $\Gamma_{ij\pm 1}(P_0)$], имеем в силу (8), (9) и (10)

$$R_{ij}(P_0) \geqslant |\Pi - P_0| > \frac{\varkappa}{2} r_{ij}(P_0) > \frac{\varkappa^2}{4} R_{ij}(P_0), \tag{11}$$

$$R'_{ij}(P_0) \geqslant |f(\Pi) - f(P_0)| > N|\Pi - P_0|. \tag{12}$$

Применяя к множеству E и к последовательностям $\{\Gamma_{ij}(P_0)\}$ теорему Витали в ее общей формулировке ([2]), получим конечное число точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и таких соответствующих им гиперповерхностей $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ $(\Gamma_k \in \{\Gamma_{ij}(P_k)\})$, что каждая Γ_k лежит вне всех остальных гиперповерхностей и часть e множества E, заключающаяся внутри совокупности этих гиперповерхностей, имеет внешнюю меру, удовлетворяющую условию:

$$m^*e > \frac{1}{2} m^*E > 0. \tag{13}$$

Обозначая через Π_k точку, связанную с Γ_k [т. е. точку, удовлетворяющую условиям (11) и (12)], и через Γ'_k гиперповерхность, в которую $P' = f(P)$ преобразует Γ_k, будем иметь:

$$|\Pi_k - P_k| > \frac{\varkappa^2}{4} R_k, \tag{11'}$$

$$R'_k > N|\Pi_k - P_0|, \tag{12'}$$

и

$$r'_k > \frac{\varkappa}{2} R'_k. \tag{7'}$$

Поэтому

$$r'_k > \frac{\varkappa^3}{2^3} N R_k. \tag{14}$$

Отсюда следует, что сумма S гиперобъемов (внутренних), ограниченных гиперповерхностями $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_m$, удовлетворяет неравенству:

$$S > \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r'^{n}_k > \frac{\varkappa^{3n} N^n}{2^{3n}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R_k^{(n)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varkappa^{3n} N^n}{2^{3n}} m^*e > \frac{\varkappa^{3n} N^n}{2^{3n+1}} m^*E. \tag{15}$$

Но это невозможно, ибо N — сколь угодно большое число, а S не превосходит гиперобъема ограниченной области U'.

Итак, мы показали, что условие (6) выполняется почти всюду в области G. Отсюда по известной теореме В. В. Степанова([3]) следует, что $f(P)$ обладает дифференциалом в смысле Штольца почти всюду в области G.

4. Наложим на $f(P)$ дополнительное ограничение, потребовав, чтобы каждое множество точек области G, имеющее положительную меру, преобразовывалось бы посредством $P' = f(P)$ в множество с положительной внешней мерой (речь идет только об n-мерной мере). Кроме того в формулировке условия б) пункта 2 вместо последовательности гиперповерхностей $\{\Gamma_n(P_0)\}$ будем говорить о семействе гиперповерхностей $\{\Gamma_\lambda(P_0)\}$ $(0 < \lambda < \infty)$, сплошь заполняющем некоторую окрестность точки P_0 [очевидно, что в этом случае отпадает надобность в условии (3)]. Тогда, рассуждая по предыдущему или же применяя уже доказанный результат к функции $P = \varphi(P')$, обратной по отношению к $P' = f(P)$ (достаточно рассматривать P и P' в областях U и U', соответствие между которыми является топологическим), найдем, что почти всюду в области G будет удовлетворяться неравенство:

$$\varliminf_{P \to P_0} \frac{|f(P) - f(P_0)|}{|P - P_0|} > 0. \tag{16}$$

Обозначая через $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ координаты точки P, а через x'_k $(k=1, 2, \dots, n)$ координаты $P'=f(P)$, имеем по доказанному выше почти всюду в области G:

$$\Delta x'_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \Delta x_l + \varepsilon_k (P, P_1) \cdot | P_1 - P |,$$

где $\varepsilon_k (P, P_1) \to 0$, если $P_1 \to P$.

Поэтому в силу (16) почти всюду в области G

$$\varliminf_{P_1 \to P} \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \Delta x_l \right)^2}{\sum_{l=1}^{n} (\Delta x_l)^2} > 0, \tag{16'}$$

откуда следует, что якобиан

$$\frac{D(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля почти всюду в области G. Отсюда и из дифференцируемости функции $f(P)$ почти всюду вытекает, наконец, что почти для каждой точки P_0 области G существует семейство гиперэллипсоидов с центром в P_0 и гомотетичных относительно P_0, которое посредством $P'=f(P)$ преобразуется в семейство гиперповерхностей с коэффициентом эксцентричности относительно $P'_0=f(P_0)$, равным единице.

5. Класс непрерывных и локально-унивалентных отображений, при которых некоторое семейство гиперэллипсоидов $\{E_\lambda(P_0)\}$, имеющих центр в P_0 и гомотетичных относительно P_l, переходит почти для всех точек P_0 в семейство гиперповерхностей $\{E'_\lambda(P'_0)\}$ с коэффициентом эксцентричности относительно $P'_0=f(P_0)$, равным единице, является предметом глубоких исследований М. А. Лаврентьева ([4]) (главным образом, для $n=2$ и при некоторых дополнительных ограничениях).

Из теоремы п. 2 следует, что *этот класс содержится в классе отображений, обладающих почти всюду полным дифференциалом в смысле Штольца*. Из п. 4 следует далее, что *при дополнительной гипотезе о переходе всякого множества положительной меры в множество положительной внешней меры замена гиперэллипсоидов произвольным семейством гиперповерхностей и одновременная замена значения* 1 *для коэффициента эксцентричности преобразованного семейства произвольным положительным числом* (*не большим* 1) *не расширяют класса.*

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета

Поступило
23 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Menchoff, Мат. сб., новая серия, **2** (1937). [2] C. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1927). [3] W. Stepanoff, Math. Annalen, **90** (1923); Мат. сб., **32** (1925). [4] M. Lavrentieff, Мат. сб., **42** (1935); ДАН, XX, 343 (1938).