Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА КОММУТАТИВНЫХ ГРУППАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1940)

В настоящей заметке теорема Бохнера о представлении непрерывных положительно определенных функций обобщается на случай, когда областью изменения аргумента является произвольная коммутативная топологическая группа, на которой существует инвариантная мера, непрерывная относительно сдвигов*. Вопрос о представлении положительно определенных функций, заданных на произвольной дискретной коммутативной группе, был разрешен, притом в несколько более общей форме, в моей заметке [1]. Поэтому здесь группа будет предполагаться не дискретной. Однако все рассуждения с соответствующими изменениями и упрощениями будут сохранять силу и для произвольных дискретных, равно как и бикомпактных, групп, так что одновременно получатся новые доказательства теорем 2 и 3 заметки [1].

Я буду опираться на некоторые результаты из теории характеров, полученные мною совместно с И. М. Гельфандом [2].

Пусть на коммутативной топологической группе G (со второй аксиомой счетности или локально-бикомпактной) определена инвариантная, вполне аддитивная мера такая, что борелевские множества измеримы, мера открытых множеств отлична от нуля, существует открытое множество, имеющее конечную меру, и мера пересечения измеримого множества с тем же множеством, сдвинутым на элемент h, как функция от h, непрерывна в нуле группы G.

Обозначим через L пространство Банаха всех абсолютно интегрируемых (относительно этой меры) функций $x(g)$ $(g \in G)$ с обычными сложением и умножением на комплексные числа и с нормой

$$\|x\| = \int |x(g)|\, dg.$$

В L можно определить умножение (свертывание) элементов:

$$x * y = \int x(g-h)\, y(h)\, dh\,^{**}.$$

---

* После сдачи настоящей заметки в редакцию «Докладов» я узнал из письменного сообщения М. Г. Крейна, что доказываемый здесь результат для случая локально-бикомпактных групп был получен несколько раньше, притом совершенно отличным методом, А. Повзнером. Заметка А. Повзнера печатается в настоящем номере «Докладов».

** В силу теоремы Фубини (имеющей здесь место) $x * y = y * x$ почти всюду существует и $\|x * y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

Так как, по предположению, группа G не дискретна, то в получающемся так кольце L нет единицы. Присоединяя формально единицу e, образуем нормированное кольцо([3]) R из элементов $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$ (λ комплексные числа, $x(g)\in L$) с нормой $\|\mathfrak{z}\|=\|\lambda e+x(g)\|=|\lambda|+\|x\|$ и с естественно определенными алгебраическими операциями.

Кольцо L образует в R максимальный идеал M_0, так что при гомоморфизме $R\to R/M_0$ элемент $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$ переходит в число $(\mathfrak{z}, M_0)=\lambda$, в частности,

$$(x, M_0)=0 \quad \text{для всех } x(g)\in L. \tag{1}$$

Все остальные максимальные идеалы M кольца R представимы в виде

$$(\mathfrak{z}, M)=(\lambda e+x(g), M)=\lambda+\int x(g)\chi(g)\,dg, \tag{2}$$

где $\chi(g)$ — непрерывные характеры группы G, различные для различных максимальных идеалов M. Обратно, каждый непрерывный характер $\chi(g)$ определяет максимальный идеал M кольца R, именно, как совокупность всех $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$, для которых правая часть равенства (2) обращается в нуль. При этом

$$\chi(h)=\frac{(x(g-h), M)}{(x(g), M)} \tag{3}$$

для всякого $x(g)$, не принадлежащего к M (такие $x\in L$ существуют, так как M, по предположению, отлично от M_0). Группа G обладает достаточным множеством непрерывных характеров: для каждого $g_0\neq 0$ существует непрерывный характер χ такой, что $\chi(g_0)\neq 1$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим бикомпактное топологическое пространство всех максимальных идеалов кольца R [([3]), определение 5]. Функции $(\mathfrak{z}, M)$ непрерывны на $\mathfrak{M}$. Для каждого элемента $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)\in R$ существует комплексно сопряженный элемент $\tilde{\mathfrak{z}}=\bar{\lambda}e+\bar{x}(-g)$: $(\tilde{\mathfrak{z}}, M)=\overline{(\mathfrak{z}, M)}$ для всех $M\in\mathfrak{M}$. Поэтому [([3]), теорема 7] функции $(\mathfrak{z}, M)$ всюду плотны в пространстве C всех непрерывных функций на $\mathfrak{M}$ с нормой

$$\|\psi\|=\sup|\varphi(M)|.$$

Удаляя из $\mathfrak{M}$ максимальный идеал M_0 и отождествляя оставшиеся максимальные идеалы с соответствующими характерами, мы превратим множество X всех непрерывных характеров группы G в локально-бикомпактное пространство. Если группа G локально-бикомпактна, так что μ есть мера Хаара на ней, то X является топологической группой, локально-бикомпактной в обычной топологии.

Лемма. *Каждое компактное в X замкнутое множество Ξ характеров равностепенно непрерывно: для всякого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U нуля группы G, что $|\chi(g+h)-\chi(g)|<\varepsilon$ для всех $\chi\in\Xi$ и всех $h\in U$, $g\in G$.*

Доказательство. В силу (3) имеем

$$|\chi(g+h)-\chi(g)|=|\chi(h)-1|=\left|\frac{(x(g-h), M)-(x(g), M)}{(x(g), M)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\|x(g-h)-x(g)\|}{|(x(g), M)|}. \tag{4}$$

По теореме Урысона существует функция $\psi(M)$, непрерывная на $\mathfrak{M}$, равная 1 в Ξ и равная 0 в M_0. Так как функции $(\mathfrak{z}, M)$ всюду плотны в C, то существует $x(g)\in L$ такое, что $|\psi(M)-(x, M)|<\frac{1}{2}$ и, значит, $|(x, M)|>\frac{1}{2}$ на Ξ. В силу (4) имеем тогда

$$|\chi(g+h)-\chi(g)|<2\|x(g-h)-x(g)\| \quad \text{для всех } \chi\in\Xi,$$

и утверждение леммы следует из непрерывности $\|x(g-h)-x(g)\|$, как функции от h, в нуле группы G.

Следствие 1. *$\chi(g)$ непрерывна по совокупности переменных χ, g.*

Следствие 2. *Пусть $F(\Delta)$ — функция множеств на локально-бикомпактном пространстве X всех непрерывных характеров группы G, вполне аддитивная на борелевских множествах. Ее «характеристическая функция»*

$$\psi(g)=\int \chi(g)\, F(\Delta_\chi)$$

равномерно непрерывна.

Доказательство. В силу полной аддитивности функции $F(\Delta)$ для каждого $\varepsilon>0$ существует компактное множество $\Xi \subset X$ такое, что $\operatorname{var} F(\Xi)>\operatorname{var} F(X)-\varepsilon$. Далее, при фиксированном Ξ существует окрестность U нуля группы G такая, что $|\chi(h)-1|<\varepsilon$ для всех $h \in U$, $\chi \in \Xi$. Имеем

$$|\psi(g+h)-\psi(g)| \leqslant \int_{\Xi} |\chi(h)-1|\,|F(\Delta_\chi)|+2 \operatorname{var} F(X-\Xi)<\varepsilon(2+\operatorname{var} F(X))$$

для всех $h \in U$ и всех $g \in G$.

Пусть теперь $\varphi(g)$ измеримая, положительно определенная функция на G, так что для любых элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ $(n=1,2, \ldots)$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{k, l=1}^{n} \varphi(g_k-g_l)\, \xi_k \bar{\xi}_l \geqslant 0. \tag{5}$$

Из (5), с помощью приема, принадлежащего Ф. Риссу ([4]), заключаем, что для всех функций $x(g) \in L$ выполняется неравенство

$$\iint \varphi(g-h)\, x(g)\, \bar{x}(h)\, dg\, dh \geqslant 0. \tag{5'}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\operatorname{vrai}\max|\varphi(g)|=1$ [случай $\operatorname{vrai}\max|\varphi(g)|=0$ тривиален, остальные приводятся к указанному]. Положим для всякого элемента $\mathfrak{z}=\lambda e+x(g)$ кольца R

$$L\{\mathfrak{z}\}=\lambda+\int \varphi(g)\, x(g)\, dg.$$

Функционал L аддитивен и однороден. Так как $\bar{\varphi}(-g)=\varphi(g)$, то

$$L\{\tilde{\mathfrak{z}}\}=\overline{L\{\mathfrak{z}\}}. \tag{6}$$

Теорема 1. *L есть позитивный линейный функционал в пространстве C, причем $\|L\|=1$.*

Доказательство. Прежде всего, очевидно,

$$|L\{\mathfrak{z}\}| \leqslant\|\mathfrak{z}\|. \tag{7}$$

Кроме того в силу (5')

$$\begin{aligned} L\{x * \tilde{x}\} &= \int \varphi(g)\left(\int x(g+h)\, \bar{x}(h)\, dh\right) dg= \\ &= \iint \varphi(g-h)\, x(g)\, \bar{x}(h)\, dg\, dh \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) следует неравенство Шварца

$$|L\{x * \tilde{y}\}|^2 \leqslant L\{x * \tilde{x}\}\, L\{y * \tilde{y}\}. \tag{9}$$

Докажем, что имеет место также неравенство

$$|L\{x\}|^2 \leqslant L\{x * \tilde{x}\}. \tag{10}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U нуля группы G, что $\int |x(g+h) - x(g)|\, dg < \varepsilon$ для всех $h \in U$. Положим $y(g) = \frac{1}{\mu(U)}$ для $g \in U$ и 0 вне U [$\mu(U)$ обозначает меру множества U]. Имеем $\|y * \tilde{y}\| = 1$ и, следовательно, в силу (7)

$$|L\{y * \tilde{y}\}| \leqslant 1. \tag{11}$$

Далее,

$$|L\{x\} - L\{x * \tilde{y}\}| = \left| \int \varphi(g) \left(x(g) - \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_U x(g+h)\, dh \right) dg \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_U \int |x(g+h) - x(g)|\, dg\, dh < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это в соединении с неравенствами (9) и (11) дает (10).

Неравенство (10) распространяется на произвольные элементы кольца R:

$$|L\{\mathfrak{z}\}|^2 \leqslant L\{\mathfrak{z} * \tilde{\mathfrak{z}}\}. \tag{10'}$$

Действительно, в силу (6) и (10)

$$L\{\mathfrak{z} * \tilde{\mathfrak{z}}\} = L\{(\lambda e + x) * (\bar{\lambda} e + \tilde{x})\} = \lambda\bar{\lambda} + \lambda \overline{L\{x\}} + \bar{\lambda} L\{x\} + L\{x * \tilde{x}\} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda\bar{\lambda} + \lambda \overline{L\{x\}} + \bar{\lambda} L\{x\} + |L\{x\}|^2 = |\lambda + L\{x\}|^2 = |L\{\mathfrak{z}\}|^2.$$

Комбинируя (10') и (7) и обозначая $\mathfrak{z} * \tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{y} = \mathfrak{y}^{(1)}$, $\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{y}^{(n-1)} * \mathfrak{y}$, получаем

$$|L\{\mathfrak{z}\}| \leqslant \sqrt{L\{\mathfrak{y}^{(2^n)}\}^{2^{-n}}} \leqslant \sqrt{\|\mathfrak{y}^{(2^n)}\|^{2^{-n}}}.$$

Так как здесь n произвольно, а $\|\mathfrak{y}^{(m)}\|^{-m}$ при $m \to \infty$ стремится к $\sup|(\mathfrak{y}, M)| = \sup|(\mathfrak{z}, M)|^2$, то получаем

$$|L\{\mathfrak{z}\}| \leqslant \sup|(\mathfrak{z}, M)|. \tag{12}$$

Таким образом L является линейным функционалом в кольце функций $(\mathfrak{z}, M)$, и так как это кольцо всюду плотно в C, то L по непрерывности может быть продолжен на все C.

Так как

$$L\{1e\} = 1 \equiv (1e, M), \tag{13}$$

то $\|L\| = 1$. Из (12) и (13) следует также позитивность функционала L. Прежде всего, если $(\mathfrak{z}, M)$ вещественно для всех M, то и $L\{\mathfrak{z}\}$ вещественно. Действительно, из $(\mathfrak{z}, M) \equiv (\tilde{\mathfrak{z}}, M)$ следует $L\{\mathfrak{z}\} = L\{\tilde{\mathfrak{z}}\} = \overline{L\{\mathfrak{z}\}}$. Пусть теперь $(\mathfrak{z}, M) \geqslant 0$ для всех M. Имеем $0 \leqslant (\mathfrak{z}, M) \leqslant \|\mathfrak{z}\|$, откуда также $0 \leqslant (\|\mathfrak{z}\| e - \mathfrak{z}, M) \leqslant \|\mathfrak{z}\|$. Так как $(\|\mathfrak{z}\| e - \mathfrak{z}, M)$ вещественно, то $L\{\|\mathfrak{z}\| e - \mathfrak{z}\}$ также вещественно; в силу (12) и (13) получаем

$$L\{\|\mathfrak{z}\| e - \mathfrak{z}\} = \|\mathfrak{z}\| - L\{\mathfrak{z}\} \leqslant \|\mathfrak{z}\|,$$

т. е.

$$L\{\mathfrak{z}\} \geqslant 0.$$

По непрерывности позитивность L сохраняется на всем C. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Измеримая положительно определенная функция $\varphi(g)$ почти всюду совпадает с некоторой характеристической функцией $\int \chi(g) F(\Delta_\chi)$, где $F(\Delta)$ — однозначно определяемая функцией $\varphi(g)$ неотрицательная непрерывная сверху функция множеств на локально-биком-*

пактном пространстве X всех непрерывных характеров группы G, вполне аддитивная на борелевских множествах, причем

$$\operatorname{var} F(X) = \operatorname{vrai}\max|\varphi(g)|.$$

Доказательство. Как показал А. А. Марков ([5]), позитивный линейный функционал в пространстве всех непрерывных функций на бикомпактном пространстве представим в виде интеграла по некоторой «внешней мере»—однозначно определенной этим функционалом неотрицательной непрерывной сверху функции множеств, вполне аддитивной на борелевских множествах; при этом непрерывность сверху понимается в том смысле, что значение функции на некотором множестве есть нижняя грань ее значений на покрывающих это множество областях. Из теоремы 1 следует поэтому, что

$$L\{\mathfrak{z}\} = \int (\mathfrak{z}, M)\, F(\Delta_M),$$

где $F(\Delta)$—функция множеств, обладающая указанными свойствами. Переходя от R к L и от $\mathfrak{M}$ к X и принимая во внимание (1) и (2), получаем

$$L\{x\} = \int\limits_{\mathfrak{M}} (x, M)\, F(\Delta_M) = \int\limits_{X} \left(\int x(g)\,\chi(g)\,dg \right) F(\Delta_\chi). \tag{14}$$

В силу следствия 1 и полной аддитивности инвариантной меры в G и меры F в X функция $x(g)\chi(g)$ измерима в $G \times X$, и мы можем применить теорему Фубини. Получаем

$$\int \varphi(g)\,x(g)\,dg = \int \left(\int \chi(g)\,F(\Delta_\chi) \right) x(g)\,dg. \tag{15}$$

Так как здесь $x(g)$—произвольный элемент из L, то почти всюду

$$\varphi(g) = \int \chi(g)\,F(\Delta_\chi). \tag{16}$$

При этом в силу непрерывности функции $\int \chi(g)\,F(\Delta_\chi)$ (следствие 2)

$$\operatorname{vrai}\max|\varphi(g)| = \int F(\Delta_\chi) = \operatorname{var} F(X).$$

Если бы наряду с (16) для $\varphi(g)$ имело место также представление $\varphi(g) = \int \chi(g)\,\Phi(\Delta_\chi)$, где $\Phi(\Delta)$ вполне аддитивна на борелевских множествах, то, переходя в обратном порядке от (15) к (14) (с заменой F на Φ), мы получили бы, что $\Phi(\Delta)$ определяет тот же функционал L в C, что и $F(\Delta)$, и, следовательно, по приведенной выше теореме А. А. Маркова, совпадает с $F(\Delta)$ на всех борелевских множествах, где F отлична от нуля. Теорема 2 доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
14 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Райков, ДАН, XXVII, № 4 (1940). [2] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, ДАН, XXVIII, № 3 (1940). [3] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [4] F. Riesz, Acta Szeged, 6 (1933). [5] А. А. Марков, Мат. сб., **4** (**46**), 1 (1938).