Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О ПОЗИТИВНЫХ ФУНКЦИЯХ НА АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 V 1940)

В дальнейшем будут рассматриваться локально-компактные абелевы группы со второй аксиомой счетности. Целью настоящей заметки является определение общего вида позитивных функций на таких группах.

Операцию умножения будем записывать в виде суммы.

Определение. Непрерывная функция $f(x)$, заданная на группе, называется позитивной, если:

1. $f(-x)=\bar{f}(x)$.

2. Форма $\sum\limits_{i,\, s=1}^{n} f(x_i-x_s)\, z_i \bar{z}_s \geqslant 0$ для любых n элементов x_i.

Обозначим рассматриваемую группу через H, группу ее характеров через К, характер группы H через $\varkappa$.

Теорема. *Необходимое и достаточное условие позитивности функции $f(x)$ состоит в следующем.*

На множестве К *существует такая абсолютно-аддитивная функция меры $\varphi(M)$, что*

$$f(y)=\int\limits_{\mathrm{K}} e^{i\varkappa(y)} d\varphi(\varkappa), \qquad y \subset H.$$

Функция $\varphi(M)$ однозначно определяется функцией $f(x)$.

Предположим сначала, что H разлагается в прямую сумму трех групп—векторной, компактной и дискретной с конечным числом линейно независимых образующих:

$$H=V+C+D.$$

Мы будем считать в целях упрощения записи, что V—аддитивная группа действительных чисел, а D—циклическая группа. Это не изменит рассуждений. Очевидно, $f(x)$ можно считать функцией от трех переменных t, a, c, где $-\infty<t<\infty$, a принимает все целые значения и c—элемент компактной группы C.

Следовательно,

$$f(x)=F(t,\, a,\, c).$$

Лемма 1. *Функция*

$$F_{\mathrm{A},\, n}(x,\, y;\, c)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-(n-1)}^{k=(n-1)}\int\limits_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\left(1-\frac{|t|}{A}\right)F(t,\, k,\, c)\, e^{-itx}e^{-iky}\, dt$$

позитивна на группе C при любых x и y.

Лемма 2. *Если $\Phi(c)$ — позитивная функция на компактной группе C, то*

$$\Phi(c)=\sum_{1}^{\infty}\lambda_k e^{i\varkappa_k(c)},$$

где $\varkappa_k(c)$ — характеры группы C и $\lambda_k>0$.

Доказательство следует из теоремы Мерчера на основании позитивности ядра интегрального уравнения

$$M_y\Phi(x-y)\varphi(y)=\lambda\varphi(x),$$

где M — среднее Неймана.

На основании леммы 2 получаем для $F_{A,n}$ разложение

$$F_{A,n}(x, y; c)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{A,n;k}(x, y)\,e^{i\varkappa_k(c)}. \tag{1}$$

Далее, пользуясь известными теоремами из теорем преобразований Фурье ([1]), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{0}^{2\pi}F_{A,n}(x, y; c)\,e^{ix\alpha}e^{iya}\,dy=\left(1-\frac{|a|}{n}\right)\left(1-\frac{|a|}{A}\right)F(\alpha, a, c).$$

Интегрируя правую часть (1) почленно и переходя к пределу при $A\to\infty$, $n\to\infty$, докажем теорему.

Доказательство в общем случае проводится на основании следующей теоремы Л. С. Понтрягина ([2]).

В группе H существует последовательность подгрупп

$$H_1\subset H_2\ldots\subset H_n\subset\ldots$$

со следующими свойствами:

1. Совокупность всех подгрупп H_n покрывает H.
2. $H_n=V_n+C_n+D_n$.

Математический институт
Харьковского государственного университета

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. [2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы.