Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. С. ЛАНДКОФ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ИРРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 V 1940)

1. Пусть Ω — открытое множество трехмерного пространства, F — его граница, которая предполагается ограниченной, $f(s)$ — любая B-измеримая ограниченная функция, заданная на F. Тогда, как известно, решение обобщенной задачи Дирихле дается формулой Валле-Пуссена

$$\varphi(M) = \int_F f(s)\, d\mu^M(S),$$

где μ^M — распределение масс на F, получающееся выметанием единичной массы из точки M внутри Ω. Вслед за Ф. Риссом (2) будем называть μ^M массами Грина для точки M.

В 1938 г. Фростман (3) показал, что массу Грина можно определить и для точек F. Для регулярных точек это будет просто единичная масса, сосредоточенная в данной точке, а для иррегулярных — некоторое непрерывное распределение на F.

Будем говорить, что данная задача Дирихле разрешима в иррегулярной точке P, если φ непрерывна в точке P, где $f(s)$ также непрерывна. Пользуясь массами Грина, можно получить необходимое и достаточное условие для разрешимости задачи Дирихле в точке P в виде равенства:

$$f(P) = \int_F f(s)\, d\mu^P(S).$$

При этом предполагается, что $f(s)$ непрерывна всюду, за исключением множества точек емкости нуль.

Этот результат для непрерывной функции $f(s)$ впервые получен М. Келдышем (4).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть иррегулярные точки $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ стремятся к P и соответствующие им массы Грина μ^{P_n} имеют некоторый предел ν. Тогда ν состоит из массы $m \leqslant 1$, сосредоточенной в точке P, и распределения $(1-m)\mu^P$.*

Последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, для которой массы μ^{P_n} сходятся и $m=1$, будем называть особенной. Если последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ не особенная, то из разрешимости задачи Дирихле в точках этой последовательности следует разрешимость ее в P. Для доказательства достаточно в равенстве

$$f(P_n) = \int\limits_F f(s)\, d\mu^{P_n}(S)$$

перейти к пределу. Если же последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ особенная, то удается построить граничную функцию, для которой задача Дирихле разрешима во всех точках P_n и не разрешима в P. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы из разрешимости задачи Дирихле в точках последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, стремящейся к P, следовала разрешимость в P, состоит в том, чтобы данная последовательность не была особенной.*

2. Обозначим $\mu^P(r)$ часть массы Грина, лежащую внутри сферы радиуса r с центром в P, и рассмотрим при фиксировании r множества I_n иррегулярных точек, для которых $\mu^P(r) \leqslant 1 - \frac{1}{2^n}$*. Если обозначить F_I множество всех иррегулярных точек, то $F_I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Возьмем в каждом I_n счетное всюду плотное множество D_n. Для простоты выберем их так, чтобы $D_n \subset D_{n+1}$, и обозначим $D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n$. Нетрудно видеть, что из разрешимости во всех точках D следует разрешимость во всех точках F_I. Итак, доказана

Теорема 3. *Можно выбрать из F_I такое счетное множество D, что разрешимость задачи Дирихле в точках D всегда влечет за собой разрешимость всюду.*

Эта теорема принадлежит также М. Келдышу [4], который доказал ее существенно иначе.

Из доказательства теоремы 3 усматриваем, что в построенное множество D попадут все точки из F_I, являющиеся изолированными во всех I_n. Эти точки Q могут быть охарактеризованы тем, что всякая последовательность иррегулярных точек, стремящаяся к Q, будет особенной. Назовем такие точки квазиизолированными и обозначим их множество Q_I. Оказывается, что имеет место

Теорема 4. *Всякое разрешающее множество D содержит Q_I.*

Доказывается эта теорема построением граничной функции, для которой задача Дирихле будет разрешима во всех точках заданного счетного множества и не будет разрешима в данной квазиизолированной точке.

3. Множество F_I может иметь весьма различный характер: оно может быть всюду плотным на F, может содержать линейные континуумы. Если, однако, предположить, что Ω есть область и каждая точка на F достижима извне жордановой кривой, а каждая жорданова кривая на F достижима извне жордановой поверхностью, то представляется весьма вероятным, что последнее обстоятельство не может иметь места.

Для плоской жордановой кривой удается доказать следующую более точную теорему.

Теорема 5. *На всякой плоской жордановой кривой иррегулярные точки образуют множество первой категории.*

---

* При некоторых довольно общих ограничениях, изложенных на F, можно доказать, что I_n замкнуто.

При доказательстве приходится пользоваться следующим небольшим обобщением известного критерия Винера ([5]).

Для иррегулярности точки P необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c(r_i)}{r_i},$$

где $c(r)$ — емкость части $c\Omega$ внутри сферы радиуса r с центром в P, а $1 < a < \frac{r_i}{r_{i+1}} < b$.

Для пространственной жордановой кривой вопрос остается открытым.

Институт математики
Академия Наук УССР
Киев

Поступило
23 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Brelot, Acta Szeged, IX (1938). [2] F. Riesz, Acta Szeged, IX (1938). [3] Frostman, Acta Szeged, IX (1938). [4] М. Келдыш, ДАН, XVIII, № 6 (1938). [5] N. Wiener, Journ. of Math. a. Phys. Mass. Inst. of Techn., III, n° 1 (1924).