Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

О РАСШИРЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VII 1940)

Пусть R — нормированное кольцо [1]. Элемент $x \in R$ называется *обобщенным делителем нуля*, если существует такая последовательность $y_n \in R$, что

$$1) \inf_n \| y_n \| > 0, \quad 2) \| x \cdot y_n \| \to 0.$$

В частности, обычные делители нуля являются и обобщенными; если единичная сфера компактна, то верно и обратное. Элемент x, имеющий обратный элемент, не может быть обобщенным делителем нуля: если y_n таковы, что $x \cdot y_n \to 0$, то и $y_n = x^{-1} x y_n \to 0$. Но элемент, не имеющий обратного элемента, не обязан быть обобщенным делителем нуля; в кольце A всех функций $w(z)$, непрерывных в круге $|z| \leqslant 1$ и аналитических внутри него, с нормой $\| w \| = \max\limits_{|z| \leqslant 1} |w(z)|$, функция $w(z) = z$ не имеет обратной; из принципа максимума модуля легко следует, что она не является обобщенным делителем нуля.

Лемма. Пусть $x \in R$ и λ_0 — граничная точка множества значений функции $x(M)$ [1]; тогда $x - \lambda_0 e$ есть обобщенный делитель нуля.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$, причем λ_n не принадлежит к множеству значений $x(M)$; тогда существует $(x - \lambda_n e)^{-1}$ [1]. Положим

$$y_n = \frac{(x - \lambda_n e)^{-1}}{\| (x - \lambda_n e)^{-1} \|}.$$

Так как

$$\| (x - \lambda_n e)^{-1} \| \geqslant \max_M | x(M) - \lambda_n |^{-1} \geqslant | \lambda_0 - \lambda_1 |^{-1},$$

то

$$(x - \lambda_0 e) y_n = (x - \lambda_n e) y_n + (\lambda_n - \lambda_0) y_n = \frac{e}{\| (x - \lambda_n e)^{-1} \|} + (\lambda_n - \lambda_0) y_n \to 0$$

и в силу того, что $\| y_n \| = 1$, $x - \lambda_0 e$ есть обобщенный делитель нуля.

В частности, действительный элемент $x \in R$ [т. е. такой, что функция $x(M)$ принимает только действительные значения], не имеющий обратного, всегда есть обобщенный делитель нуля. Заметим, что соответствующие элементы y_n можно выбрать действительными [это существенно при рассмотрении действительных колец [2]]. В самом деле, если x — действительный элемент, то x^2 — неотрицательный; поэтому существуют действительные элементы

$$z_n = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{-1}}{\left\| \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \right\|},$$

для которых, как было доказано, $x^2 z_n \to 0$. Если $\inf \|xz_n\| > 0$, то можно положить $y_n = xz_n$, и утверждение доказано; в противном случае существует подпоследовательность z_{n_k} такая, что $xz_{n_k} \to 0$ и можно положить $y_k = z_{n_k}$.

Из леммы непосредственно следует, что в любом нормированном кольце, отличном от тела комплексных чисел, существуют обобщенные делители нуля, отличные от нуля. Это можно сформулировать еще следующим образом:

Теорема 1. *Если существует константа $K > 0$ такая, что $\|x \cdot y\| \geqslant K \|x\| \cdot \|y\|$ для любых x и y из R, то R есть тело комплексных чисел.*

В частности, нормированное кольцо, в котором $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ для любых x и y, есть тело комплексных чисел. Это — теорема Мазура ([3]).

Теорема 2. *Пусть R содержит подкольцо R_1, в котором вместе со всяким элементом x имеется комплексно-сопряженный [т. е. такой элемент $\bar{x}$, что $\bar{x}(M_1) = \overline{x(M_1)}$ для любого $M_1 \subset R_1$]. Тогда всякий максимальный идеал $M_1 \subset R_1$ содержится в некотором максимальном идеале $M \subset R$.*

Для доказательства заметим прежде всего, что действительные элементы $x \in R_1$ изображаются действительными функциями $x(M)$ $(M \subset R)$, так как для любого σ и $\tau \neq 0$ $x - (\sigma + i\tau)e$ имеет обратный уже в R_1 и поэтому $x(M)$ не может принимать значения $\sigma + i\tau$. Из этого следует, что комплексно-сопряженные элементы x и $\bar{x}$ из R_1 изображаются комплексно-сопряженными функциями, так как $x + \bar{x}$ и $\frac{1}{i}(x - \bar{x})$ изображаются действительными функциями.

Если действительный элемент $x \in R_1$ имеет обратный элемент $y \in R$, то $y \in R_1$; в самом деле, в противном случае x был бы в R_1, а следовательно, и в R — обобщенным делителем нуля, что несовместимо, как мы видели, с существованием обратного элемента.

Допустим, что некоторый максимальный идеал $M_1 \subset R_1$ не содержится ни в одном максимальном идеале кольца R. Это значит, что для каждого $M \subset R$ найдется такой $x \in M_1$, что $x(M) \neq 0$. В таком случае $x\bar{x}(M) > 0$. Так как функция $x\bar{x}(M)$ непрерывна ([1]), то существует окрестность, в которой $x\bar{x}(M)$ остается положительной. Из полученного таким образом покрытия пространства максимальных идеалов R в силу его бикомпактности ([1]) можно выбрать конечное, определяемое функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и составить сумму:

$$x = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_n \bar{x}_n \in M_1,$$

которая уже ни в одной точке не обратится в нуль. Но тогда в R существует x^{-1}; так как x — действительный элемент R_1, то $x^{-1} \in R_1$, что противоречит тому, что x принадлежит максимальному идеалу $M_1 \subset R_1$.

Теорема 2, вообще говоря, перестает быть справедливой, если R_1 не удовлетворяет поставленному условию. Рассмотрим кольцо R всех непрерывных функций $w(z)$, определенных на окружности $|z|=1$, и подкольцо $R_1=A$ (см. выше). Функция $w(z)=z\in R_1$ и не имеет в R_1 обратной, следовательно, принадлежит максимальному идеалу $M_1\subset R_1$; но этот максимальный идеал не может быть расширен до максимального идеала $M\subset R$, так как в R эта функция имеет обратную.

Поступило
6 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [2] И. М. Гельфанд, Теория нормированных колец (диссертация). [3] S. Mazur, C. R., Paris, **207**, 1025 (1938).