Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

АНАМОРФОЗА ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VII 1940)

I. Матрицы анаморфозы полиномов Массо

Пусть полином $F(t_1, t_2, t_3)$ представлен в виде

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{i=0}^{m_{k+1}} \sum_{j=0}^{m_{k+2}} t_{k+1}^i t_{k+2}^j v_{ij}^{(k)} \tag{1}$$

полинома от переменных t_{k+1}, t_{k+2} с коэффициентами из кольца $\mathfrak{T}^{(k)}$ полиномов от t_k (здесь $k=1, 2, 3$; при $k+l>3$ $t_{k+l}^i \equiv t_{k+l-3}^i$).

Назовем k-ой матрицей анаморфозы или k-ой A-матрицей полинома (1) матрицу $T^{(k)} = \| v_{ij}^{(k)} \|$, рассматриваемую как таблицу с двойным входом

$$\begin{array}{c|cccc}
T^{(k)} & t_{k+2}^0 & \cdots & t_{k+2}^{m_{k+2}} \\
\hline
t_{k+1}^0 & v_{00}^{(k)} & \cdots & v_{0,\, m_{k+2}}^{(k)} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
t_{k+1}^{m_{k+1}} & v_{m_{k+1},\, 0}^{(k)} & \cdots & v_{m_{k+1},\, m_{k+2}}^{(k)}
\end{array}, \tag{2}$$

Выберем для t_{k+l} $(l=1, 2)$ систему R_{k+l} некоторого числа полиномов

$$(R_{k+l});\ \mathrm{R}_{k+l,\,0}^{(k)},\ R_{k+l,\,1}^{(k)}, \ldots,\ \mathrm{R}_{k+l,\,m_{k+e}}^{(k)};\ [\text{при } k+l>3\ R_{k+l} \equiv R_{k+l-3}] \tag{3}$$

с коэффициентами из кольца $\mathfrak{T}^{(k)}$ так, чтобы соблюдались следующие три условия:

а) $\mathrm{R}_{k+l,\,0}^{(k)}, \ldots, \mathrm{R}_{k+l,\,\overline{m}_{k+e}}^{(k)}$ — полиномы степени не выше m_{k+l} порядка полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ относительно переменной t_{k+l}.

b) Элементы каждой из систем (R_{k+l}) $(l=1, 2)$ должны быть линейно независимыми по кольцу $\mathfrak{T}^{(k)}$, т. е. из тождества $\sum_{i=0}^{\overline{m}_{k+l}} f_i(t_k)\, \mathrm{R}_{k+l,\,i}^{(k)} \equiv 0$ следует всегда $f_i(t_k)\equiv 0$ $(i=0, \ldots, m_{k+e})$.

c) Существует такая матрица $\overline{T}^{(k)}=\|\overline{v}_{ij}^{(k)}\|$ с элементами из кольца $\mathfrak{T}^{(k)}$, из $(1+\overline{m}_{k+1})$ строк и из $(1+\overline{m}_{k+2})$ столбцов, что для заданного полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ имеет место тождество

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{i=0}^{\overline{m}_{k+1}} \sum_{j=0}^{\overline{m}_{k+2}} \mathrm{R}_{k+1,\,i}^{(k)} \cdot R_{k+2,\,j}^{(k)} \cdot \overline{v}_{ij}^{(k)}. \tag{4}$$

Матрицу $\overline{T}^{(k)}=\|\overline{v}_{ij}^{(k)}\|$ назовем k-ой кусочной A-матрицей полинома $F(t_1, t_2, t_3)$; системы (R_{k+1}) и (R_{k+2}) — первой, второй системой образующих этой матрицы.

Ранг $\bar{\delta}_k$, инвариантные множители $\overline{E}_0^{(k)}, \overline{E}_2^{(k)}, \ldots, \overline{E}_{\bar{\delta}_k}^{(k)}$ матрицы $\overline{T}^{(k)}$, k-ой кусочной A-матрицы полинома $F(t_1, t_2, t_3)$, образующие системы которой состоят из полиномов, не зависящих от t_k, удовлетворяют равенствам

$$\bar{\delta}_k = \delta_k \tag{5}$$

$$\overline{E}_i^{(k)} = E_i^{(k)} \quad (i=1, 2, \ldots, \delta_k), \tag{6}$$

где δ_k — ранг матрицы $T^{(k)}$, k-ой A-матрицы полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ и $E_1^{(k)}, \ldots, E_{\delta_k}^{(k)}$ — ее инвариантные множители.

Будем считать, что в анаморфозе A

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv |f_{k1}\, f_{k2}\, f_{k3}| \tag{7}$$

линейно независимы все те из функций системы

$$(R_{k+1}) \quad f_{k+1,\,1}, f_{k+1,\,2}, f_{k+1,\,3},$$

которые отличны от нуля, и что таковы же и функции системы

$$(R_{k+2}) \quad f_{k+2,\,1}, f_{k+2,\,2}, f_{k+2,\,3},$$

отличные от нуля.

Системы (R_{k+1}) и (R_{k+2}) являются образующими системами k-ой кусочной A-матрицы полинома $F(t_1, t_2, t_3)$. Эту матрицу назовем k-ой матрицей Массо полинома $F(t_1, t_2, t_3)$, соответствующей анаморфозе A, или k-ой его M матрицей.

В зависимости от жанра полинома по отношению к каждой из переменных t_{k+1}, t_{k+2} за k-ую M-матрицу данного полинома можно взять одну из следующих

$M^{(k)}$	$f_{k+2,\,1}$	$f_{k+2,\,2}$	$f_{k+2,\,3}$
$f_{k+1,\,1}$	0	f_{k3}	$-f_{k2}$
$f_{k+1,\,2}$	$-f_{k3}$	0	f_{k1}
$f_{k+1,\,3}$	f_{k2}	$-f_{k1}$	0

(8)

$$
\begin{array}{c|cc}
M^{(k)} & f_{k+2,\,1} & f_{k+2,\,3} \\
\hline
f_{k+1,\,1} & 0 & -f_{k2} \\
f_{k+1,\,2} & -f_{k3} & f_{k1} \\
f_{k+1,\,3} & f_{k2} & 0
\end{array} \qquad (8')
$$

$$(f_{k+2,\,2}=0)$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
M^{(k)} & f_{k+2,\,1} & f_{k+2,\,2} & f_{k+2,\,3} \\
\hline
f_{k+1,\,2} & -f_{k3} & 0 & f_{k1} \\
f_{k+1,\,3} & f_{k2} & -f_{k1} & 0
\end{array} \qquad (8'')
$$

$$(f_{k+1,\,1}=0)$$

$$
\begin{array}{c|cc}
M^{(k)} & f_{k+2,\,1} & f_{k+2,\,3} \\
\hline
f_{k+1,\,2} & -f_{k3} & f_{k1} \\
f_{k+1,\,3} & f_{k2} & 0
\end{array} \qquad (8''')
$$

$$(f_{k+1,\,1}=0;\ f_{k+2,\,2}=0)$$

Ранг каждой из этих матриц равен двум и, следовательно, ранг δ_k каждой из A-матриц $T^{(k)}$ полинома Массо также равен двум.

Для A-матриц приведенных полиномов первые инвариантные множители равны 1.

В работе указаны вторые инвариантные множители A-матрицы нормальных полиномов; в частности, для полиномов жанра 3 они также равны 1.

II. Анаморфоза полиномов

Расположим полином $F(t_1, t_2, t_3)$ порядка m_k относительно t_k по степеням одной из переменных, например t_1,

$$t_1^{m_1}\varphi_{10}^{(23)} + t_1^{(m_1-1)}\varphi_{11}^{(23)} + \ldots + \varphi_{1m_1}^{(23)} \equiv F(t_1, t_2, t_3). \qquad (9)$$

Здесь $\varphi_{ij}^{(23)} \equiv \varphi_{ij}(t_2, t_3)$.

Выделим из последовательности полиномов

$$\varphi_{10}^{(23)}, \varphi_{11}^{(23)}, \ldots, \varphi_{1m_1}^{(23)} \qquad (10)$$

подпоследовательность

$$F_{11}^{(23)}, F_{12}^{(23)}, \ldots, F_{1r_1}^{(23)}\ [F_{1i}^{(23)} \equiv F_{1i}(t_2, t_3)] \qquad (11)$$

по следующему закону: $F_{11}^{(23)} \equiv \varphi_{10}^{(23)}$, а $F_{1i}^{(23)}$ — первый из членов последовательности (10), линейно не зависящий от первых, уже выделенных $(i-1)$ членов подпоследовательности (11). Полином $F(t_1, t_2, t_3)$ может быть представлен в виде

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{i=1}^{k_1} f_{1i} F_{1i}^{(23)}, \tag{12}$$

где $f_{1i} \equiv f_{1i}(t_1)$ — некоторые полиномы переменной t_1.

Назовем представление полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ в виде (12) первым каноническим разложением, полиномы $F_{1i}^{(23)}$ — коэффициентами разложения, а систему полиномов f_{1i} — образующей системой этого разложения.

k-ое каноническое разложение полинома Массо тогда и только тогда имеет два члена ($r_k=2$), если этот полином — жанра нуль относительно переменной t_k.

Среди кусочных A-матриц $\overline{T}^{(k)}$ полинома $F(t_1, t_2, t_3)$ при любом k ($k=1, 2, 3$) найдется такая матрица, образующими системами которой являются образующие системы соответствующих канонических разложений полинома $F(t_1, t_2, t_3)$. При этом элементы такой матрицы — линейные комбинации элементов образующей системы k-го канонического разложения. Эту матрицу назовем канонической A-матрицей.

Для полиномов Массо каноническая A-матрица $\overline{T}^{(k)}$ эквивалентна $M^{(k)}$-матрице Массо.

Если считать, что число столбцов матрицы $M^{(k)}$ не менее числа строк, то матрица $M^{(k)}$ может быть взята под одной из следующих форм

$$M_1^{(k)} = \begin{Vmatrix} 0 & f_{k3} & -f_{k2} \\ -f_{k3} & 0 & f_{k1} \\ f_{k2} & -f_{k1} & 0 \end{Vmatrix}; \tag{13}$$

$$M_2^{(k)} = \begin{Vmatrix} -f_{k3} & 0 & f_{k1} \\ f_{k2} & -f_{k1} & 0 \end{Vmatrix}; \tag{13'}$$

$$M_3^{(k)} = \begin{Vmatrix} -f_{k3} & f_{k1} \\ f_{k2} & 0 \end{Vmatrix}, \tag{13''}$$

где f_{ki} — некоторые полиномы от переменной t_k.

Для того чтобы полином $F(t_1, t_2, t_3)$, имеющий неприводимый множитель от всех трех переменных, допускал рациональную анаморфозу, необходимо, чтобы при любом k ($k=1, 2, 3$) для канонической A-матрицы $\overline{T}^{(k)}$, имеющей число столбцов, не меньшее числа строк, соблюдались следующие условия:

1. Если $\overline{T}^{(k)}$ имеет два столбца, то существуют такие постоянные α и β, что произведение $P \cdot \overline{T}^{(k)} \cdot Q$, где

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

дает матрицу ранга, равного двум, по меньшей мере с одним из элементов, равным нулю, т. е. с точностью до перестановок строк столбцов матрицу $M_3^{(k)}$ (13″).

2. Если $\overline{T}^{(k)}$ имеет три столбца, то существует такая неособенная матрица C с постоянными элементами, что

$$\overline{T}^{(k)} \cdot C = M^{(k)},$$

где $M^{(k)}$ — матрица одной из форм (13) или (13′), и достаточно, чтобы одно из указанных условий имело место при каком-либо одном значении k.

Приведенные условия позволяют не только решить вопрос о том, допускает или нет данный полином рациональную анаморфозу, но и указывает алгоритм ее отыскания для полиномов Массо.

Поступило
4 VII 1940