Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. В. ЯКОВКИН

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕПРИВОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1940)

Приведем сначала одну теорему без доказательства.

Теорема. *Всякую целую рациональную функцию $f(x)$, заданную в поле вещественных чисел, подстановкой $x = y + h$ можно преобразовать в такую функцию $\mathfrak{F}(y)$, у которой все коэффициенты будут иметь знаки, одинаковые со знаком старшего коэффициента, и каждый из ее сомножителей в этом поле будет содержать коэффициенты только одного знака.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству известной леммы M. Mandl'я [1].

Заметим только, что при любом вещественном h, не меньшем верхней границы вещественных частей корней функции $f(x)$, данное утверждение всегда имеет место.

Опираясь на эту теорему, мы докажем следующий критерий неприводимости многочленов в поле рациональных чисел.

Теорема. *Если для целочисленной функции*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с верхней границей вещественных частей корней, равной R, найдутся два рациональных числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$, из которых одно положительно, а другое не меньше R, и если

$$\left[\frac{q_1 q_2}{q_1; q_2}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)$$

есть простое число, то функция $f(x)$ неприводима в поле рациональных чисел.

Доказательство. Будем вести доказательство от противного, т. е. допустим, что функция $f(x)$ приводима. Тогда должно иметь место равенство

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r$ и $\psi(x) = c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \ldots + c_s$ также целочисленные функции.

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\frac{p_2}{q_2} \geqslant R$, а $\frac{p_1}{q_1} > 0$.

Подставим в обе части равенства (1) $x=y+\frac{p_2}{q_2}$, тогда мы получим

$$f\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right)=\varphi\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right)\psi\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right). \tag{2}$$

Так как $\frac{p_2}{q_2}\geqslant R$, то, по предыдущей теореме, функции

$$f\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right),\ \varphi\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right) \text{ и } \psi\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

будут содержать коэффициенты только одного знака, причем каждая из них содержит, по крайней мере, два члена, ибо свободный член функции $f\left(y+\frac{p_2}{q_2}\right)$ отличен от нуля.

Подставим теперь в равенство (2) вместо y положительное рациональное число $\frac{p_1}{q_1}$, тогда получим

$$f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)=\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\psi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right). \tag{3}$$

Каждое из чисел

$$f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right),\ \varphi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) \text{ и } \psi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

представляет собой сумму по крайней мере двух слагаемых, причем все слагаемые этих чисел представляют собой рациональные дроби одного знака со знаменателями, представляющими произведения целых степеней чисел q_1 и q_2.

Умножим обе части равенства (3) на наименьшее кратное наивысших степеней чисел q_1 и q_2, стоящих в знаменателях, т. е. на

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n=\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^r\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^s;$$

тогда мы будем иметь

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_3)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)=\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^r\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^s\psi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right),$$

где

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^r\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) \text{ и } \left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^s\psi\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

представляют собой суммы двух или большего числа целых чисел одного знака, т. е. каждое из этих чисел есть целое число, отличное от 0 и ± 1.

Таким образом, допустив, что функция $f(x)$ приводима, мы пришли к тому, что число

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

представимо в виде произведения двух целых чисел, отличных от 0 и ± 1, т. е. мы пришли к тому, что это число составное, а оно по условию простое.

Из этой теоремы в качестве частного случая вытекает следствие, аналогичное известному критерию неприводимости венгерского ученого G. Polya (²) (когда $q_1=q_2=p_1=1$ и $p_2=k$).

Кроме того для целочисленных функций $f(x)$, коэффициенты которых положительные числа меньшие 10, из данной теоремы получается известный критерий A. Cohn'a ([2]).

Приведем пример

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1.$$

За значение R можно взять хотя бы число 3, равное

$$\frac{A}{|a_0|} + 1 = \frac{2}{1} + 1,$$

и так как

$$3^4 f\left(\frac{10}{3}\right) = 3^4 f\left(\frac{1}{3} + 3\right) = 1579$$

есть простое число, то функция $f(x)$ неприводима в поле рациональных чисел.

Москва

Поступило
29 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Mandl, Journ. reine angew. Math., 113, 252—261 (1894). [2] Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, II (1937).