Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 8

АЭРОДИНАМИКА

В. А. КОНСТАНТИНОВ

О ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ВИХРЯХ В ПРИЛОЖЕНИИ К АЭРОДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ ВИНТА И ВЕТРЯКА

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 VI 1940)

Компоненты скорости, вызванной системой геликоидальных вихрей, сходящих с лопастей для любой точки (x, y, z) пространства, выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{\bar r^2-\bar r\bar z\cos\varphi_k-\bar r\bar y\sin\varphi_k}{[\bar r^2+\bar y^2+\bar z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k-2\bar r\bar y\sin\varphi_k+\lambda_0^2(\varphi_1-\varphi)^2]^{3/2}}\,d\varphi,\\ v_y &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{[\bar z-\bar r(\varphi-\varphi_1)\sin\varphi_k-\bar r\cos\varphi_k]\,\lambda_0}{[\bar r^2+\bar y^2+\bar z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k-2\bar r\bar y\sin\varphi_k+\lambda_0^2(\varphi_1-\varphi)^2]^{3/2}}\,d\varphi,\\ v_z &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{[\bar y+\bar r(\varphi-\varphi_1)\cos\varphi_k-\bar r\sin\varphi_k]\,\lambda_0}{[\bar r^2+\bar y^2+\bar z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k-2\bar r\bar y\sin\varphi_k+\lambda_0^2(\varphi_1-\varphi)^2]^{3/2}}\,d\varphi. \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Здесь R — радиус винта, Γ — циркуляция, r — радиус сечения лопасти, $\bar r = \frac{r}{R}$ — относительный радиус сечения, $\bar x = \frac{x}{R}$, $\bar y = \frac{y}{R}$, $\bar z = \frac{z}{R}$ — относительные координаты точки пространства, v — скорость потока, D — диаметр винта, n — число оборотов в 1 сек., $\lambda_0 = \frac{v}{\pi n D}$ — режим работы винта, φ — переменный параметр вихревых нитей, i — число вихрей (лопастей), $\varphi_k = \varphi + 2\pi\left(1-\frac{k}{i}\right)$, где $k = 1, 2, 3 \ldots, i$.

Непосредственно для аэродинамического расчета необходимо знать эти скорости на оси лопасти. Тогда, полагая $\varphi_1 = 0$ и $\bar y = 0$, получим выражения (1) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{\bar r^2-\bar r\bar z\cos\varphi_k}{[\bar r^2+z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k+\lambda_0^2\varphi^2]^{3/2}}\,d\varphi,\\ v_y &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{[\bar z-\bar r\varphi\sin\varphi_k-\bar r\cos\varphi_k]\,\lambda_0}{[\bar r^2+\bar z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k+\lambda_0^2\varphi^2]^{3/2}}\,d\varphi,\\ v_z &= -\frac{1}{4\pi R}\int_0^1 \frac{d\Gamma}{d\bar r}\,d\bar r\sum_{k=1}^{i}\int_0^\infty \frac{[\bar r\varphi\cos\varphi_k-\bar r\sin\varphi_k]\,\lambda_0}{[\bar r^2+\bar z^2-2\bar r\bar z\cos\varphi_k+\lambda_0^2\varphi^2]^{3/2}}\,d\varphi. \end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Проанализируем выражение (2), взяв сечение далеко за винтом. Для получения вызванных скоростей в этом случае достаточно продолжить вихревую систему впереди винта и произвести интеграцию по φ от $-\infty$ до $+\infty$.

В силу симметрии нетрудно видеть, что для компонентов v_x и v_y результаты удвоятся. Таким образом получаем, во-первых, уточненную теорему Финстервальдера-Фруда:

Теорема 1. *Для точек, лежащих на радиусах, с которых сходит вихревая пелена, и для точек, делящих пополам центральные углы между этими радиусами, вызванная осевая скорость в плоскости вращения винта равна половине скорости, вызванной далеко за винтом.*

И, во-вторых, аналогичную для окружной скорости:

Теорема 2. *Для точек, лежащих на радиусах, с которых сходит вихревая пелена, и для точек, делящих пополам центральные углы между этими радиусами, вызванная окружная скорость в плоскости вращения винта равна половине скорости, вызванной далеко за винтом.*

Для других точек плоскости вращения винта это не имеет места.

Обращаясь к третьей из формул (2) радиальной скорости v_z, получаем:

Теорема 3. *В плоскости далеко за винтом, для точек на радиусах, с которых сходит вихревая пелена, и для точек, делящих пополам центральные углы между этими радиусами, вызванная радиальная скорость равна нулю.*

Для других точек плоскости далеко за винтом это не имеет места.

При бесконечном числе вихрей (лопастей) все три теоремы справедливы в прежней формулировке.

Как показано автором в предыдущей работе [1], непосредственно из выражений (2) получаются все выводы Н. Е. Жуковского [2].

Таким образом обобщаются задачи расчета винта с конечным и бесконечным числом лопастей.

В выражении (1) обозначим интегралы, стоящие под знаком сумм, соответственно через $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ и назовем компонентами влияния.

Положим: $k=i=1$

и

$$\overline{X}'=\overline{X}; \qquad \overline{Y}'=\overline{Y}\,\frac{\overline{z}}{\lambda_0}; \qquad \overline{Z}'=\overline{Z}\,\frac{\overline{y}}{\lambda_0}. \tag{3}$$

Составим сумму: $\overline{X}'+\overline{Y}'+\overline{Z}'$. Эта сумма интегралов выражается в элементарных функциях. Интегрируя, принимая во внимание соотношения (3), окончательно получим:

$$\overline{X}\cdot\lambda_0+\overline{Y}\cdot\overline{z}+\overline{Z}\cdot\overline{y}=1+\frac{\lambda_0\varphi_1}{\sqrt{(\overline{r}-\overline{z})^2+\lambda_0^2\varphi_1^2}}. \tag{4}$$

Полагая в этом выражении $\varphi_1=0$ и $\overline{y}=0$, что будет соответствовать точкам на оси z (т. е. на лопасти), получим:

$$\overline{X}\cdot\lambda_0+\overline{Y}\cdot\overline{z}=1, \tag{5}$$

или

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{\overline{z}^2+\lambda_0^2}}\cdot\overline{X}+\frac{\overline{z}}{\sqrt{\overline{z}^2+\lambda_0^2}}\cdot\overline{Y}=\frac{1}{\sqrt{\overline{z}^2+\lambda_0^2}}. \tag{6}$$

Для любого конечного числа вихрей выражение (6) будет иметь вид:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}} \sum_1^i \underline{\bar{X}_i} + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}} \sum_1^i \underline{\bar{Y}_i} = \frac{i}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}} . \tag{7}$$

Получаем следующую теорему:

Теорема 4. *При конечном числе вихрей, любым образом распределенных по окружности цилиндра, сумма проекций вызванной скорости (осевой и окружной) на направление относительной скорости для внутренних точек равна проекции вызванной осевой скорости, а для внешних — проекции окружной скорости на то же направление исчисленных для бесконечного числа вихрей.*

Проф. Tomijiro Moriya ([3],[4]), вычисляя сумму проекций скоростей v_x и v_y на направление, перпендикулярное к относительной скорости, обходит точку разрыва, вводя так называемый «фактор индукции», представляющий отношение:

$$I = \frac{dw_n}{dw_{n_1}} , \tag{8}$$

где w_{n_1} — скорость, вызванная прямолинейным вихрем, которая так же обращается в бесконечность при $\bar{r} = \bar{z}$. Не приводя доказательства Т. Морийя считает, что эти бесконечности — одного порядка, а потому фактор индукции в точке разрыва равен единице. При вычислении каждого компонента в отдельности это не будет иметь места.

Рассматривая отношения (8) в этом случае, получим:

$$\lim_{\bar{r}\to\bar{z}} I_x = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}} \tag{9'}$$

и

$$\lim_{\bar{r}\to\bar{z}} I_y = -\frac{\lambda_0}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}} . \tag{9''}$$

Возьмем проекцию полученных значений на направление, перпендикулярное к относительной скорости. Тогда фактор индукции в точке разрыва действительно равен

$$I = I_x \cdot \cos\beta_{\bar{z}} + I_y \cdot \sin\beta_{\bar{z}} = 1.$$

Сопоставляя (9′) и (9″), получаем:

Теорема 5. *Результирующая компонент фактора индукции (I_x и I_y) в точке разрыва перпендикулярна к относительной скорости в этой точке.*

Умножим теперь уравнение (7) на $\frac{d\Gamma}{d\bar{r}} \cdot \frac{\bar{r}-\bar{z}}{\bar{r}-\bar{z}}\, d\bar{r}$. Замечая, что

$$(\bar{r}-\bar{z}) \sum_1^i \underline{\bar{X}_i} = I_x \quad \text{и} \quad (\bar{r}-\bar{z}) \sum \underline{\bar{Y}_i} = I_y,$$

и интегрируя обе части этого выражения, принимая во внимание, что $\Gamma(z_0) = \Gamma(1) = 0$, окончательно получим:

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{\lambda_0}{\bar{z}} . \tag{10}$$

Теорема 6. *При конечном числе лопастей результирующая вызванной (окружной и осевой) скорости в некоторой точке $\bar{z}$, лежащей* *на радиусе, с которого сходят вихри, перпендикулярна к относительной скорости в этой точке.*

Эта теорема доказана только для определенного закона распределения λ по радиусу, который принят в исходных выражениях. Поэтому приведем общее доказательство.

Продолжим вихревую систему впереди винта. Тогда поток будет потенциальным во всех точках, за исключением точек вихревой поверхности. Направление вихревого вектора $\vec{\omega}$ будет совпадать с направлением касательной к вихревой линии, и угол, образованный нормалью к вихревой поверхности и вектором $\vec{\omega}$, равен $\frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\omega_x, n)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\omega_y, n)+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\omega_z, n)=0,$$

а это есть условие интегрируемости дифференциального уравнения

$$v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz=0$$

и одновременно условие перпендикулярности векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$. Отбрасывая теперь добавленную впереди винта вихревую систему и принимая во внимание теоремы 1, 2 и 3, получим теорему 6.

Это позволяет вычислять только одну компоненту v_x или v_y.

Имеющиеся вычисления фактора индукции ([3], [4], [5]) производились по формуле

$$I=(\bar{r}-\bar{z})\,\frac{\bar{z}\sum\limits_{1}^{i}\underline{\bar{X}}_i-\lambda_0\sum\limits_{1}^{i}\underline{\bar{Y}}_i}{\sqrt{\bar{z}^2+\lambda_0^2}}\,. \tag{11}$$

Решая совместно уравнения (7) и (11), можно просто получить компоненты $\sum\limits_{1}^{i}\underline{\bar{X}}_i$ и $\sum\limits_{1}^{i}\underline{\bar{Y}}_i$, а, следовательно, и I_x и I_y, необходимые для предлагаемого ниже метода аэродинамического расчета. Однако упомянутые вычисления недостаточно точны, и ими можно воспользоваться только частично.

На основании уравнения (7) необходимо вычислить только одну компоненту, но и это представляет чрезвычайно трудоемкую работу. Попытки уменьшить трудоемкость, пользуясь такими средствами, как полиномы Лежандра и функции Бесселя ([6], [7]), не привели к желаемым результатам.

Укажем более простой способ, значительно сокращающий трудоемкость. Представим компонент $\underline{\bar{X}}$ в следующем виде:

$$\underline{\bar{X}}=\int\limits_0^\infty\frac{\bar{r}^2-\bar{r}\,\bar{z}\cos\varphi}{[\bar{r}^2+\bar{z}^2-2\bar{r}\,\bar{z}\cos\varphi+\lambda_0^2\varphi^2]^{3/2}}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left\{(\bar{r}^2-\bar{r}\bar{z}\cos\varphi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[\bar{r}^2-\bar{z}^2-2\bar{r}\,\bar{z}\cos\varphi+\lambda_0^2(2k\pi+\varphi)^2]^{3/2}}\right\}d\varphi, \tag{12}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$

К сумме применим известную формулу Эйлера-Маклорена. Тогда выражение (12) получим в следующем виде:

$$\underline{\overline{X}} = \frac{1}{2\pi\lambda_0} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{r}^2 - \overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi}{(\overline{r}^2 + \overline{z}^2 - 2\overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi)}\, d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\overline{r}^2 - \overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi)\, d\varphi}{(\overline{r}^2 + \overline{z}^2 - 2\overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi)\sqrt{\overline{r}^2 + \overline{z}^2 - 2\overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi + \lambda_0^2\varphi^2}} + \ldots \tag{13}$$

Ошибка при вычислении по этой формуле не превышает удвоенной величины первого отброшенного члена [8].

Обозначая в формуле (13) сумму членов, за исключением первого, через $R(\overline{r})$ и переходя к скорости, получим

$$v_x = \frac{\Gamma}{8\pi^2 R\lambda_0} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{r}^2 - \overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi}{(\overline{r}^2 + \overline{z}^2 - 2\overline{r}\,\overline{z}\cos\varphi)}\, d\varphi + \frac{\Gamma}{4\pi R} \cdot R(\overline{r}). \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что первый член представляет результат Н. Е. Жуковского для осевой скорости при бесконечном числе лопастей, а остальные члены дают поправку на конечное их число.

Если циркуляция Γ непостоянна, выражение (14) принимает вид:

$$v_x = \frac{1}{4\pi R\lambda_0}\Gamma(\overline{z}) - \frac{1}{4\pi R} \int_{\overline{z}_0}^{1} \frac{d\Gamma}{d\overline{r}} \cdot R(\overline{r})\, d\overline{r}.$$

Для облегчения вычислений необходимо иметь представление о характере функций $\sum_1^i \underline{\overline{X}}_i$ и $\sum_1^i \underline{\overline{Y}}_i$. Рассмотрим некоторые предельные значения.

Будем стремить $\overline{r}$ к нулю. Тогда

$$\lim_{\overline{r}\to 0} \sum_1^i \underline{\overline{X}}_i = 0; \quad \lim_{\overline{r}\to 0} \sum_1^i \underline{\overline{Y}}_i = \frac{i}{\overline{z}}.$$

Возьмем другой предельный случай при $\overline{r} \to \infty$:

$$\lim_{\overline{r}\to\infty} \sum_1^i \underline{\overline{X}}_i = \frac{i}{\lambda_0}; \quad \lim_{\overline{r}\to\infty} \sum_1^i \underline{\overline{Y}}_i = 0.$$

Принимая во внимание рассуждения при выводе теоремы (6), заключаем, что функции $\sum_1^i \underline{\overline{X}}_i$ и $\sum_1^i \underline{\overline{Y}}_i$ есть гармонические функции, стремящиеся, при изменении $\overline{r}$, к найденным выше пределам, оставаясь по абсолютной величине больше последних. Таким образом получаем:

Теорема 7. *При конечном числе вихрей (лопастей), равномерно распределенных по окружности цилиндра, значения компонент влияния* $\sum_1^i \underline{\overline{X}}_i$ и $\sum_1^i \underline{\overline{Y}}_i$ *(а следовательно, и соответствующие значения компонент фактора индукции I_x и I_y) по абсолютной величине всегда больше тех же значений, исчисленных для бесконечного числа вихрей (лопастей).*

Пользуясь изложенным, автору настоящего сообщения удалось: 1) получить компоненты фактора индукции, а не проекцию их, как то дают имеющиеся вычисления; 2) получить их с гораздо большей точностью и, наконец, 3) получить эти компоненты для всех практически нужных режимов, начиная от $\lambda_0 = 0$. Последнее обстоятельство весьма важно для исследования работы винта на месте, а также для расчета геликоптеров и автожиров.

Предлагаемый метод аэродинамического расчета состоит в следующем. Представляем циркуляцию Γ в виде тригонометрического ряда

$$\Gamma = \sum A_n \sin n\theta,$$

а вызванную скорость в данной точке $\bar{z}$ одной из формул:

$$v_x = -\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{\bar{r}_0}^{1} \frac{d\Gamma}{d\bar{r}} \cdot \frac{I_x}{(\bar{r}-\bar{z})}\, d\bar{r},$$

$$v_y = -\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{\bar{r}_0}^{1} \frac{d\Gamma}{d\bar{r}} \cdot \frac{I_y}{(\bar{r}-\bar{z})}\, d\bar{r}.$$

Дальше задача решается методом последовательных приближений, каковой является единственным принципиально правильным и общим в данном случае.

Энергетический институт
Академии Наук СССР

Поступило
20 VI 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Константинов, Изв. Энергетич. ин-та АН СССР, т. IX. [2] Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, т. VI. [3] Tomijiro Moriya, Journal of the Faculty of Engineering Tokyo Imperial University, Tokyo, Japan, XX, № 7 (1933). [4] T. Moriya, Journal of the Soc. of Aeronaut. Science of Nippon, 3, № 9 (1936). [5] Б. Л. Минухин, Труды ЦАГИ, вып. 401 (1939). [6] Н. Н. Поляхов, Труды ЦАГИ, вып. 324 (1937). [7] H. Reissner, Phil. Mag., 24, № 163 (1937). [8] Charlier, Mechanik des Himmels, II.