Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 8

ГИДРОДИНАМИКА

Е. М. МИНСКИЙ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУТИ СМЕШЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком Г. М. Кржижановским 10 VII 1940)

1. Существенную роль в построении современных полуэмпирических теорий турбулентности играет определение так называемого «пути смешения». Путем смешения называется некоторая средняя поперечная длина, на которой отдельные, перемещающиеся в потоке массы жидкости теряют свою скорость и приобретают скорость окружающей среды. С другой стороны, в статистической теории турбулентности введено понятие геометрической характеристики (шкалы) турбулентности, определяемой затуханием корреляционной связи между скоростями в двух различных точках потока. В нашем исследовании мы пытались экспериментально установить связь между этими двумя геометрическими размерами.

2. Рассмотрим в потоке две точки: M (с координатами x, y, z) и M' (с координатами x', y', z'). В каждой из этих точек проекции скорости принимают различные, зависящие от времени значения u, v, w и u', v', w'. Изменение скоростей по времени в турбулентном потоке случайно, распределение принимаемых ими значений удовлетворяет закону Гаусса. Поэтому можно говорить о корреляционной связи ряда мгновенных значений скорости в одной и другой точках. Коэффициент корреляции, равный единице при совпадении точек, убывает с расстоянием между ними.

По предложению Тейлора ([1]) геометрическая характеристика потока определяется как интеграл от коэффициента корреляции, взятый вдоль прямой, соединяющей две сравниваемые точки, причем расстояние между ними изменяется от нуля до бесконечности. Например, если сравниваемые точки лежат в плоскости XY, то

$$L = \int_0^\infty R_n\,dy = \int_0^\infty \frac{\overline{n(0)\,n(y)}}{\sqrt{\overline{n^2}(0)}\cdot\sqrt{\overline{n^2}(y)}}\,dy. \tag{1}$$

Здесь n—проекция пульсационной скорости на любую ось, а черта над величинами обозначает осреднение по времени, по закону, удовлетворяющему условиям Рейнольдса. Величина L, представляющая собой среднее расстояние, на которое распространяется корреляционная связь скорости в точке $y=0$, со скоростями в других точках, является тем самым некоторым средним размером формирующих поток масс жидкости. Такое определение вполне применимо для неограниченного потока и используется при исследовании изотропной турбулентности.

3. В случае руслового потока, ограниченного стенками и направленного вдоль оси X, формула (1) не применима для корреляции по поперечному к основной скорости направлению, ибо коэффициент корреляции становится равным нулю не в бесконечности, а с приближением к твердой стенке. Поэтому для всех значений y и z, кроме значений, соответствующих точкам, лежащим на оси потока, кривая затухания коэффициента корреляции R_n не будет симметричной при изменении y или z.

Для руслового потока приходится пользоваться приемом, указанным в работе советских ученых Фридмана и Келлера ([2]), опубликованной еще в 1924 г. Фридман и Келлер рекомендуют коррелировать между собою скорости в точках, симметричных относительно некоторого центра. Рассматриваются наряду с основной точкой M (с координатами t, x, y, z) две точки M' (с координатами $t-\tau$, $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$) и M'' (с координатами $t+\tau$, $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$). Вычисляются коэффициенты корреляции между скоростями, соответствующими точкам M' и M'', причем величины τ, ξ, η, ζ определяют сдвиг одной точки относительно другой во времени и пространстве. При таком выборе сравниваемых точек кривая корреляции имеет только одну ветвь ($\tau, \xi, \eta, \zeta > 0$), и геометрические характеристики могут быть определены с помощью формул вида

$$L_n = \int\limits_0^\infty R_{nn}\, d\sigma = \int\limits_0^\infty \frac{\overline{n(s-\sigma)\, n(s+\sigma)}}{\sqrt{\overline{n^2(s-\sigma)}}\sqrt{\overline{n^2(s+\sigma)}}}\, d\sigma, \tag{2}$$

где s—любая из координат t, x, y, z, σ—любой из параметров τ, ξ, η, ζ, соответствующий координате s, n—проекция скорости на любую ось.

4. Рассмотрим, в частности, случай равномерного плоского движения вдоль оси X между двумя параллельными стенками, расположенными вдоль прямых $y=0$ и $y=2a$.

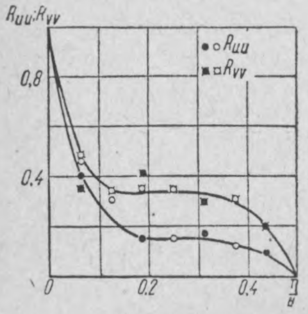
Средняя скорость потока является функцией только поперечной координаты y. Перемешивание жидкости в поперечном направлении вызывает появление фиктивного касательного напряжения, величина которого равна взятому с обратным знаком произведению плотности жидкости на среднее значение произведения продольной и поперечной составляющих пульсационной скорости. В теории Прандтля принимается, что касательное напряжение пропорционально квадрату производной от средней скорости, причем коэффициент пропорциональности равен квадрату пути смешения. Это условие позволяет вычислить величину пути смешения по известным касательному напряжению и распределению средней скорости. Такое вычисление было проделано Никурадзе ([4]) на основании многочисленных экспериментов.

В соответствии с изложенным, для статистического определения пути смешения естественно воспользоваться формулой (2). При этом, так как движение равномерное и перемешивание происходит, главным образом, в направлении оси Y, можно ограничиться сравнением точек, лежащих на одной вертикали ($\xi=0$), но на разных расстояниях от стенки (переменные y и η). Далее, при $\eta=y$ точка M' совпадает с границей потока, все проекции скорости в ней становятся равными нулю, а потому коэффициенты корреляции между ними и принимающими любые случайные значения проекциями скорости в любой другой точке должны быть приравнены нулю. Поэтому для нижней половины потока ($y \leqslant a$) верхний предел интегрирования в формуле (2) должен быть взят равным y.

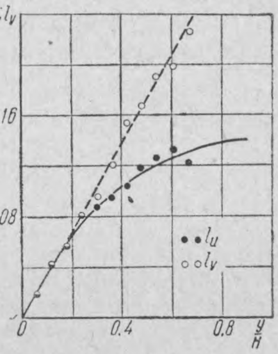
Учитывая существование в плоском движении двух проекций скорости u и v, можно определить два геометрических размера

$$l_u = \int\limits_0^y \frac{\overline{u(y-\eta)\,u(y+\eta)}}{\sqrt{\overline{u^2(y-\eta)}}\,\sqrt{\overline{u^2(y+\eta)}}}\,d\eta \quad \text{и} \quad l_v = \int\limits_0^y \frac{\overline{v(y-\eta)\,v(y+\eta)}}{\sqrt{\overline{v^2(y-\eta)}}\,\sqrt{\overline{v^2(y+\eta)}}}\,d\eta. \quad (3)$$

Коэффициенты корреляции, стоящие под знаками интеграла в формуле (3), равны единице при $\eta=0$ и обращаются в нуль при $\eta=y$. Можно предполагать, что коэффициент корреляции между поперечными скоростями v принимает несколько бóльшие значения, чем между продольными скоростями u, так как в этом случае сравниваемые точки лежат на прямой, направленной вдоль коррелируемой проекции скорости. Это положение доказано для изотропной турбулентности ([3]), на случай же неизотропной



Фиг. 1.



Фиг. 2.

турбулентности оно может быть перенесено по аналогии. Поэтому следует ожидать, что геометрический размер l_v должен быть больше, нежели размер l_u.

5. Экспериментальная проверка высказанных соображений проведена нами при исследовании движения в прямом лотке прямоугольного поперечного сечения. Пульсационные скорости измерялись с помощью обработки кинофильма, демонстрирующего движение взвешенных в воде эмульсионных шариков, удельный вес которых не отличался от удельного веса воды. Описание лотка и принцип метода измерения были опубликованы нами ранее ([5]). На фиг. 1 показано изменение коэффициентов корреляции R_{uu} и R_{vv} в зависимости от η при $y=0{,}5\,H$, где H—глубина лотка.

На график нанесены непосредственно измеренные значения коэффициентов корреляции (черные точки) и значения, полученные с помощью специального интерполирования (белые точки). Как видим, высказанное выше утверждение о превышении коэффициента корреляции между поперечными скоростями над коэффициентом корреляции между продольными скоростями подтверждается экспериментально. Естественно, что разница эта увеличивается с ростом сдвига η.

На фиг. 2 показано изменение геометрических характеристик l_u и l_v, вычисленных с помощью графического интегрирования кривых, аналогичных показанным на фиг. 1. На графике нанесено (сплошная кривая) изменение пути смешения по известной эмпирической формуле Никурадзе:

$$\frac{l}{H} = 0{,}14 - 0{,}08\left(1-\frac{y}{H}\right)^2 - 0{,}06\left(1-\frac{y}{H}\right)^4. \quad (4)$$

Точки, соответствующие l_u (черные), прекрасно совпадают с кривой Никурадзе. Точки, соответствующие l_v (белые), идут несколько выше, располагаясь с большой степенью точности вдоль прямой $\frac{l_v}{H} = \varkappa y$.

Наклон этой прямой, вычисленный по методу наименьших квадратов, равен $\varkappa = 0{,}36$, что близко совпадает со значением, обычно определяемым по распределению средних скоростей и по сопротивлению.

К сожалению, то обстоятельство, что опыты проводились в лотке со свободной поверхностью, а не в трубе, ограничивает нас вычислением R_{uu} и R_{vv} только для $y \leqslant 0{,}5H$. Несколько дополнительных точек получено нами с помощью специальной экстраполяции кривых R_{uu} и R_{vv}.

Таким образом экспериментально установлено, что путь смешения, определяемый формулой Прандтля—Никурадзе, по величине напряжения трения и градиента средней скорости совпадает с геометрической характеристикой l_u, заданной формулой (2). Этот весьма важный вывод желательно было бы подтвердить еще и другими экспериментами и в особенности экспериментами в напорном потоке.

Энергетический институт
Академии Наук СССР

Поступило
11 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc., A, 151 (1935). [2] L. Keller u. A. Friedmann, Proc. I. Intern. Congr. Appl. Mech., Delft (1924). [3] T. v. Kármán a. Howarth, Proc. Roy. Soc., A, 164 (1938). [4] «Аэродинамика», под ред. проф. Дюрэнд, т. III, стр. 164 (1939). [5] Е. М. Минский и Б. А. Фидман, Изв. Энергетич. ин-та Академии Наук, № 9 (1940).