Доклады Академии Наук СССР

1940. Том XXVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

М. Г. ХАПЛАНОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДА ТЕЙЛОРА ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 7 VI 1940)

§ 1. Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

— последовательность комплексных чисел, действительные части которых стремятся к $+\infty$. Обозначим

$$\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n = r_n e^{i\varphi_n}.$$

Через точку a плоскости проведем для каждого значения n прямую, перпендикулярную к направлению $-\varphi_n$.

Обозначим через L_{φ_n} полуплоскость, ограниченную этой прямой и обращенную в сторону положительных абсцисс.

В дальнейшем будем иметь дело с углом G_a, с вершиной в точке a, содержащим точки, каждая из которых принадлежит всем полуплоскостям L_{φ_n}, начиная с некоторой, а также с углом G'_a, получающимся из G_a, если обе стороны его повернуть вокруг вершины к положительному направлению оси абсцисс на угол $\varepsilon > 0$. Если обозначить через (ξ_0, η_0) координаты точки a, через (ξ, η) — переменной точки ζ плоскости, то необходимое и достаточное условие принадлежности точки ζ углу G_a выражается неравенством

$$-\alpha_n\xi + \beta_n\eta \leqslant -\alpha_n\xi_0 + \beta_n\eta_0, \tag{1}$$

которое должно выполняться для всех n, начиная с некоторого, $n > n_0(\xi, \eta)$. Действительно, это следует из того, что неравенство (1) при постоянном n справедливо только для точек полуплоскости L_{φ_n}.

Рассмотрим два примера.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, то G_a совпадает с полуплоскостью L_φ.

2. Если множество аргументов φ_n имеет верхний предел φ и нижний ψ, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то G_a есть общая часть полуплоскостей L_φ и L_ψ.

§ 2. Лемма. Если ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \zeta} \tag{2}$$

абсолютно сходится в точке a, то он абсолютно сходится внутри угла G_a и равномерно сходится внутри угла G'_a, как бы ни было мало число ε.

По условию ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\alpha_n \xi_0 + \beta_n \eta_0}$$

сходится. Поэтому ряд Дирихле (2) будет абсолютно сходиться в точках ζ, для которых, начиная с достаточно большого n, будет выполняться неравенство

$$-\alpha_n \xi + \beta_n \eta \leqslant -\alpha_n \xi_0 + \beta_n \eta_0,$$

т. е. внутри угла G_a. Равномерная сходимость внутри угла G'_a очевидна.

Из доказанной леммы следует, что функция, определяемая рядом Дирихле (2), голоморфна внутри угла G_a.

§ 3. Рассмотрим функцию $f(z)$, определяемую разложением

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{(z-\alpha_k)^p} + \frac{b_k}{(z-\alpha_k)^{p-1}} + \ldots + \frac{l_k}{z-\alpha_k} + P_k(z) \right], \quad (3)$$

где $P_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — полиномы.

Для получения степенного разложения ее в начале координат заметим, что

$$\frac{1}{z-\alpha_k} = -\frac{1}{\alpha_k} - \frac{z}{\alpha_k^2} - \ldots - \frac{z^{n-1}}{\alpha_k^n} + \frac{1}{\alpha_k^n} \cdot \frac{z^n}{z-\alpha_k},$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^2} = \frac{1}{\alpha_k^2} + \frac{2z}{\alpha_k^3} + \ldots + \frac{nz^{n-1}}{\alpha_k^{n+1}} - \frac{1}{\alpha_k^{n+1}} \cdot \frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{z-\alpha_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_k)^p} = (-1)^p \left[\frac{1}{\alpha_k^p} + \frac{pz}{\alpha_k^{p+1}} + \ldots + \frac{\binom{n+p-2}{p-1} z^{n-1}}{\alpha_k^{n+p-1}} - \frac{1}{\alpha_k^{n+p-1}} \quad \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \frac{z^{n+p-1}}{z-\alpha_k} \right].$$

Выбрав

$$P_k(z) = (-1)^{p-1} a_k \left(\frac{1}{\alpha_k^p} + \ldots + \frac{\binom{n+p-2}{p-1} z^{n-1}}{\alpha_k^{n+p-1}} \right) + \ldots + l_k \left(\frac{1}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{\alpha_k^n} \right),$$

получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{p-1} \frac{a_k}{\alpha_k^{n+p-1}} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \frac{z^{n+p-1}}{z-\alpha_k} + \ldots + \frac{l_k}{\alpha_k^n} \frac{z^n}{z-\alpha_k} \right]. \quad (4)$$

Если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{|\alpha_k|^{n+p}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{|\alpha_k|^{n+p-1}}, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l_k|}{|\alpha_k|^{n+1}} \quad (5)$$

для некоторого конечного целого значения $n = \nu$ сходятся, то, выбрав в формуле (4) $n = \nu$ и заметив, что при конечных p, ν и z и стремлении α_k к ∞ модули множителей $\frac{d^j}{dz^j} \frac{z^{\nu+j}}{z-\alpha_k}$ при $k \to \infty$ порядка $\frac{1}{|\alpha_k|}$, заключаем, что ряд (4) равномерно сходится во всякой конечной области с выключенными окрестностями точек α_k и определяет мероморфную функцию.

Мероморфную функцию с разложением (3) при условии сходимости рядов (5) назовем мероморфной функцией с каноническим разложением конечного порядка (ν, p).

§ 4. Теорема. *Коэффициенты степенного разложения мероморфной функции с каноническим разложением конечного порядка, начиная с некоторого индекса, можно рассматривать как значения при* $\zeta = n$ *голоморфной в некоторой полуплоскости функции*

$$\varphi(\zeta) = \zeta^{p-1}\omega_1(\zeta) + \zeta^{p-2}\omega_2(\zeta) + \ldots + \omega_p(\zeta), \tag{6}$$

где p*—наивысший порядок полюсов, а*

$$\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ \ldots,\ \omega_p(\zeta)$$

—функции, изображаемые рядами Дирихле с комплексными показателями.

Очевидно, для доказательства достаточно рассмотреть разложение мероморфной функции в начале координат, предполагая, что оно не будет полюсом функции.

В разложении (3) мероморфной функции $f(z)$ все члены $\frac{1}{(z-a_k)^q}$ разложим по положительным степеням z. Приняв во внимание выражение для полиномов $P_k(z)$, получим степенное разложение $f(z)$ в начале координат:

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^p a_k \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\binom{n+p-1}{p-1} z^n}{a_k^{n+p}} + (-1)^{p-1} b_k \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\binom{n+p-2}{p-2} z^n}{a_k^{n+p-1}} + \right.$$

$$\left. + \ldots - l_k \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{z^n}{a_k^{n+1}}\right], \tag{7}$$

сходящееся в круге, радиус которого равен расстоянию от начала координат до ближайшего к нему полюса. Внутри этого круга полученные двойные ряды абсолютно сходятся. Например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |l_k| \cdot \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{|z|^n}{|a_k|^{n+1}}$$

сходится, так как, суммируя сперва по n, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |l_k| \cdot \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{|z|^n}{|a_k|^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l_k| \cdot |z|^\nu}{|a_k|^{\nu+1}\left(1 - \left|\frac{z}{a_k}\right|\right)}.$$

Последний ряд сходится согласно условиям (5).

Меняя в равенстве (7) порядок суммирования двойных рядов, получим

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{n=\nu}^{\infty} z^n \left[(-1)^p \binom{n+p-1}{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k^{n+p}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{p-1}\binom{n+p-2}{p-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k^{n+p-1}} + \ldots - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k}{a_k^{n+1}}\right]. \tag{8}$$

Положив

$$\overline{\omega}_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\zeta \log a_k},\quad \overline{\omega}_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\zeta \log a_k}, \ldots, \overline{\omega}_p(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k e^{-\zeta \log a_k}, \tag{9}$$

получим из (8), что коэффициенты степенного разложения (8), начиная с некоторого индекса, можно рассматривать как значения при $\zeta = n$ функции

$$\varphi(\zeta) = (-1)^p \frac{(\zeta+p-1)\ldots(\zeta+1)}{(p-1)!}\overline{\omega}_1(\zeta+p) +$$

$$+ (-1)^{p-1}\frac{(\zeta+p-2)\ldots(\zeta+1)}{(p-2)!}\overline{\omega}_2(\zeta+p-1) + \ldots - \overline{\omega}_p(\zeta+1). \tag{10}$$

Функции $\overline{\omega}_k(\zeta)$ определяются рядами Дирихле (9) с комплексными показателями $\lambda_n = \log \alpha_k = \log|\alpha_k| + i \arg \alpha_k$.

Так как

$$\varphi_n = \arg \lambda_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{\arg \alpha_k}{\log|\alpha_k|} \to 0,$$

то областями абсолютной сходимости этих рядов служат полуплоскости. Существование таких областей сходимости вытекает на основании леммы § 2 из предполагаемой сходимости рядов (5).

Простыми преобразованиями выражение (10) для функции $\varphi(\zeta)$ приводим к виду (6).

Из доказанной теоремы следует, например, что коэффициенты степенных разложений в окрестности регулярных точек вейерштрассовой функции $\zeta(z)$ можно рассматривать как значение при $\zeta = n$ голоморфной в некоторой полуплоскости функции $\omega(\zeta)$, изображаемой рядом Дирихле, коэффициенты же степенных разложений эллиптической функции $p(z)$ можно рассматривать как значение при $\zeta = n$ голоморфной в полуплоскости функции вида $\varphi(\zeta) = \zeta\omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta)$, где $\omega_1(\zeta)$ и $\omega_2(\zeta)$ выражаются рядами Дирихле.

Замечание. Коэффициенты степенного разложения функции $f(z)$ в окрестности произвольной регулярной точки z_0 являются значениями при $\zeta = n$ функции, подобной функции (6) $\varphi(\zeta)$, получаемой заменой в выражениях (9) $\log \alpha_k$ на $\log(\alpha_k - z_0)$. Аналогично можно получить и функцию, значения которой при $\zeta = n$ дают коэффициенты регулярной части в разложении функции $f(z)$ в окрестности полюса α_k.

§ 5. Теорема. *Пусть функция $f(z)$ определяется степенным разложением, коэффициенты которого, начиная с некоторого, являются значениями при $\zeta = n$ функции* (6):

$$\varphi(\zeta) = \zeta^{p-1}\omega_1(\zeta) + \zeta^{p-2}\omega_2(\zeta) + \ldots + \omega_p(\zeta),$$

где

$$\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta), \ldots, \omega_p(\zeta)$$

есть ряды Дирихле с комплексными показателями

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

вещественные части которых стремятся к $+\infty$. Пусть эти ряды имеют области обсолютной сходимости.

В таком случае функция $f(z)$ есть мероморфная функция с полюсами в точках

$$e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}, \ldots$$

кратности полюсов не выше p.

Для доказательства приведем выражение (6) функции $\varphi(\zeta)$ к виду (10). Очевидно, достаточно доказать теорему для частного случая, когда

$$\varphi(\zeta) = (-1)^q \frac{(\zeta+q-1)\ldots(\zeta+1)}{(q-1)!}\,\overline{\omega}(\zeta+q), \qquad (6')$$

где

$$\overline{\omega}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k \zeta}. \qquad (9')$$

Предположим, что коэффициенты степенного разложения $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n,$$

начиная с индекса $n=\nu$, являются значениями при $\zeta=n$ функции (6′) $\varphi(\zeta)$: $d_n=\varphi(n)$, $n \geqslant \nu$, причем для этих значений n ряд Дирихле (9′) абсолютно сходится.

Положим

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),$$

где

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\nu-1} d_n z^n,$$

$$f_2(z)=\sum_{n=\nu}^{\infty} d_n z^n.$$

Выразим $f_2(z)$, подставив вместо d_n их значения через $\varphi(n)$, получим

$$f_2(z)=\sum_{n=\nu}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^q \binom{n+q-1}{q-1} c_k e^{-\lambda_k(n+q)}. \tag{11}$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| e^{-\alpha_k(n+q)}, \quad \alpha_k=R\lambda_k,$$

для значений $n \geqslant \nu$ по условию сходится и сумма его убывает с ростом n. Следовательно, для $n \geqslant \nu$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| e^{-\alpha_k(n+q)} < M.$$

Поэтому сумма ряда, составленного из абсолютных величин членов двойного ряда (11), меньше величины

$$M \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} |z|^n,$$

ограниченной, если $|z|<1$. Следовательно, внутри круга $|z|<1$ двойной ряд абсолютно сходится и порядок суммирования можно обратить. Получим

$$f_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n=\nu}^{\infty} (-1)^q \binom{n+q-1}{q-1} e^{-\lambda_k(n+q)} z^n.$$

Так как

$$\frac{1}{(z-e^{\lambda_k})^q}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^q \binom{n+q-1}{q-1} e^{-\lambda_k(n+q)} z^n,$$

то

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} (-1)^q \binom{n+q-1}{q-1} e^{-\lambda_k(n+q)} z^n = \frac{1}{(z-e^{\lambda_k})^q} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\nu-1} (-1)^q \binom{n+q-1}{q-1} e^{-\lambda_k(n+q)} z^n = (-1)^{q-1} e^{-\lambda_k(\nu+q-1)} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \frac{z^{\nu+q-1}}{z-e^{\lambda_k}}.$$

Следовательно,

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=f_1(z)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{q-1}c_k e^{-\lambda_k(\nu+q-1)}\cdot\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\frac{z^{\nu+q-1}}{z-e^{\lambda_k}}. \quad (12)$$

Равенство (12) справедливо внутри круга $|z|<1$.

Но правая часть есть ряд голоморфных функций, равномерно сходящийся во всякой конечной области с выключенными окрестностями точек e^{λ_k}, попадающих в эту область. Действительно, модуль множителя

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\frac{z^{q+\nu-1}}{z-e^{\lambda_k}}$$

при $k\longrightarrow\infty$ порядка $e^{-\alpha_k}$. Следовательно, абсолютные величины членов ряда $f_2(z)$ меньше членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,e^{-\alpha_k(\nu+q)},$$

умноженных на некоторый постоянный множитель.

Следовательно, $f_2(z)$ есть мероморфная функция с полюсами кратности q в точках $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_k}, \ldots$

Окончательно заключаем, что функция $f(z)$, отличающаяся от $f_2(z)$ на полином $f_1(z)$, обладает тем же свойством.

Научно-исследовательский
Физико-математический институт
Государственного университета
им. В. М. Молотова
Ростов-на-Дону

Поступило
22 VI 1940