Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Л. В. КЕЛДЫШ

ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КАНОНИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА E_α К КЛАССУ α И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ B-МНОЖЕСТВ ВЫСОКИХ КЛАССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 VII 1940)

В [3] нами было доказано существование канонических él α в каждом классе B-множеств. Однако для того чтобы показать, что построенный нами канонический элемент E_α является строго él α, мы доказывали, что E_α — универсальный линейный él α, и тем самым опирались на теорему о существовании B-множеств любого класса. Сейчас мы дадим гораздо более простое непосредственное доказательство того, что построенные нами канонические элементы являются строго él α.

Напомним, что мы определяем каждый él α с помощью некоторой A-системы из замкнутых множеств, полученной некоторым трансфинитным процессом [см. [3]] из исходной A-системы C_3, определяющей $F_{\sigma\delta}$. При этом все цепи A-системы C_3 непусты.

Лемма. *Всякий él α может быть определен с помощью A-системы C'_α, трансфинитно-эквивалентной произвольно заданной A-системе C_α с индексом α.*

Доказательство этой леммы проводится методом трансфинитной индукции. Опираясь на нее, мы без труда докажем требуемое предложение:

Теорема. *Канонический элемент E_α является строго* él α.

Пусть E_α—канонический элемент с индексом α, а CE_α—его дополнение относительно некоторого совершенного множества P в пространстве Бэра.

E_α определено с помощью некоторой канонической A-системы C_α, состоящей из совершенных множеств. Предположим, что E_α не является строго él α, тогда как E_α, как и CE_α, является él α [3]. В силу нашей леммы CE_α может быть определено с помощью некоторой A-системы C'_α, трансфинитно-эквивалентной C_α. E_α первой категории на P. Следовательно, CE_α второй категории на P и среди элементов системы C'_α найдется хотя бы один элемент f_{n_1}, дополняющий P до конфигурации по два элемента и содержащий порцию P. В силу структуры C_α в этой порции найдется элемент p_{m_1} системы C_α, дополняющий P до конфигурации, эквивалентной P, f_{n_1}. Рассуждая для p_{m_1} так же, как для P, мы найдем элемент f_{n_2}, дополняющий конфигурацию P, f_{n_1} и содержащий порцию f_{m_1}, а внутри этой порции в силу структуры C_α найдем элемент p_{m_2}, дополняющий конфигурацию P, p_{m_1} до конфигурации, эквивалентной P, f_{n_1}, f_{n_2}.

Поступая таким же образом счетное число раз, мы получим две последовательности элементов: одну — системы C'_α, другую — системы C_α.

$$P,\ f_{n_1},\ f_{n_2},\ \ldots,\ f_{n_k},\ \ldots \qquad (1)$$

$$P,\ p_{m_1},\ p_{m_2},\ \ldots,\ p_{m_k},\ \ldots \qquad (2)$$

причем: а) $p_{m_k} \subset f_{n_k}$ и б) каково бы ни было k, — k первых элементов последовательностей (1) и (2) образуют эквивалентные между собой конфигурации.

Последовательности (1) и (2) являются цепями исходных A-систем C_3 и C'_3 и определяют в силу а) точку x, входящую в оба исходных множества E_3 и E'_3. Так как множества E_α и CE_α взаимно дополнительны, то точка x входит в одно из них. Следовательно, одна из последовательностей (1) и (2) содержит цепь соответствующей A-системы с индексом α, определяющую x. Но тогда в силу б) и вторая последовательность содержит цепь, определяющую x, что противоречит условию $E_\alpha \cdot CE_\alpha = 0$. Таким образом, предположив, что CE_α является él α, мы приходим к противоречию и, значит, E_α является строго él α, что и требовалось доказать.

Из доказанной нами теоремы как следствие получается известная теорема о непустоте каждого класса B-множеств. При построении канонического элемента любого класса E_α мы, вообще говоря, применяем аксиому Цермело. Следовательно, и данное нами здесь доказательство непустоты классов в общем случае содержит аксиому Цермело. Однако для каждого эффективно заданного трансфинита α наше доказательство является конструктивным.

(Мы называем трансфинитное число α второго класса эффективно заданным, если для каждого трансфинита второго рода $\beta \leqslant \alpha$ осуществлен выбор фундаментальной цепочки трансфинитов, к нему сходящейся.)

Для каждого эффективно заданного трансфинита α наличие конструкции канонического él α дает возможность построения арифметического примера él α. Укажем путь построения таких примеров. В качестве исходного E_3 мы берем $F_{\sigma\delta}$, построенное Бэром [1].

$$E_3 = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

E_3 — множество тех точек x, у которых при разложении в непрерывную дробь неполные частные стремятся в ∞. E_3 — канонический элемент, а $C_3 = \{p_{n_1, \ldots, n_k}\}$ — каноническая A-система, его определяющая.

$p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ — множество тех точек, у которых среди неполных частных n_1, равных 1, n_2, равных 2, ..., n_k, равных k. $p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ — разность двух совершенных множеств и может быть рассмотрено как сумма счетного числа элементов системы C_3. $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k}$ нигде не плотно на $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$.

Легко показать, что, какова бы ни была бесконечная возрастающая последовательность целых чисел $n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^s, \ldots$, множество $\mathcal{E} = \sum_s p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k^s}$ всюду плотно на $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$. Пусть теперь α — эффективно заданный трансфинит и пусть нашим процессом построены примеры элементов всякого класса $\beta < \alpha$, причем каждый построенный нами элемент E_β определен A-системой C_β, подчиненной нашей A-системе C_3.

1) α — первого рода. Тогда нами уже построен элемент $E_{\alpha-1}$, определенный A-системой $C_{\alpha-1}$. Мы рассматриваем последовательно конфи-

гурации по 1, 2, ..., k элементов $C_{\alpha-1}$. Пусть p_{n_1}, $p_{n_1, n_2}, \ldots,$ $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$ — некоторая конфигурация системы $C_{\alpha-1}$, а $\sum\limits_{s=1}^{\infty} p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k^s}$ — сумма всех элементов, дополняющих эту конфигурацию до некоторой заданной. В силу данной нами в [3] общей конструкции эта сумма должна быть разбита на $i+1$ сумм (где i — ранг $p_{n_1, \ldots, n_k^s}$ перед сдвигом), всюду плотных на $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$. Но в силу сделанного выше замечания произвольная подсумма нашей суммы, имеющая бесконечное множество слагаемых, всюду плотна на $p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$. Разобьем

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k^s}$$

следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k^s} = \sum_{s \equiv 1(i+1)} + \sum_{s \equiv 2(i+1)} + \ldots + \sum_{s \equiv i(i+1)} + \sum_{s \equiv 0(i+1)} .$$

Элементы каждой l-ой суммы $l \leqslant i$ перенесем в ранг l, а элементы последней сотрем. Произведя таким образом разбиение и следуя общей конструкции, мы получим пример E_α элемента класса α.

2) α — второго рода. В силу эффективности α дана фундаментальная цепочка, сходящаяся к α:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \alpha.$$

Для каждого α_n нами построен пример элемента E_{α_n}, определенный A-системой C_{α_n}, подчиненной $C_{\alpha_{n-1}}$. [Это всегда можно сделать; см. [3]]. Тогда $E_\alpha = \prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и A-система C_α, определяющая E_α, полностью определяется из A-систем C_{α_n}, $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Таким образом мы указываем способ построения примера B-множества E_α класса α, где α — эффективно заданный трансфинит. Чтобы охарактеризовать арифметические свойства точек множества E_α, остается произвести вычисления. Однако эти вычисления могут оказаться чрезвычайно громоздкими. Мы укажем сейчас примеры элементов классов $\leqslant \omega$. (При построении приведенных примеров мы пользовались несколько иным способом разбиения сумм, чем указано выше, — более удобным для вычисления.)

Примером множества E_n класса n ($n > 3$ конечно) является множество всех точек $x = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, неполные частные которых стремятся к ∞, и таких, что для x существует $n-2$ возрастающих последовательности значений неполных частных:

$$\begin{array}{l} a_{31} < a_{32} < \ldots < a_{3m} < \ldots \\ a_{41} < a_{42} < \ldots < a_{4m} < \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} < a_{n2} < \ldots < a_{nm} < \ldots \end{array}$$

первая последовательность содержит все неполные частные числа x и каждая последующая является частью предыдущей; при этом числа

$n_{a_{li}}$ ($n_{a_{li}}$ — число раз, которое a_{li} встречается в разложении x) удовлетворяют сравнениям

$$n_{a_{li}} \not\equiv 0\,(p_{l-3}^{i}); \quad n_{a_{l-1,\,j}} \equiv 0\,(p_{l-3}^{i})$$

для любого $a_{l-1,\,j} > a_{li}$, где p_{l-3} — $(l-3)$-ье простое число.

Наконец,

$$E_{\omega} = \prod_{n=3}^{\infty} E_{n}.$$

Поступило
28 VI 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Acta Math., **32** (1909). [2] L u s i n, Leçons sur les ensembles anal., Paris (1930). Л. В. К е л д ы ш, ДАН, XXVI, стр. 531 (1939).