

УДК 621.31

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_1\\_58\\_74](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_74)

EDN: LTQHPX

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ

Д.В. Комнатный

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*

## ELECTROSTATIC FIELD OF OVERVOLTAGE LIMITER CALCULATION BY ADDITION THEOREMS METHOD

D.V. Komnatny

*Sukhoi State Technical University of Gomel*

**Аннотация.** Рассматривается расчет электростатического поля тороидальных экранов ограничителя перенапряжения высоковольтной линии электропередачи. Расчет осуществляется методом теорем сложения. Получены алгебраические уравнения для вычисления коэффициентов разложения потенциала экранов по тороидальным функциям. Описан способ учета влияния заряда грозовой тучи на электростатическое поле вблизи ограничителя. Проанализирована область применения полученных результатов.

**Ключевые слова:** ограничитель перенапряжения, тороидальный экран, электростатическое поле, теоремы сложения, электростатический потенциал, гармонические тороидальные функции, грозовая туча.

**Для цитирования:** Комнатный, Д.В. Расчет электростатического поля ограничителей перенапряжения методом теорем сложения / Д.В. Комнатный // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 74–78. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_1\\_58\\_74](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_74). – EDN: LTQHPX

**Abstract.** The electrostatic field calculation in toroidal screens of high-voltage power line overvoltage limiter is considered. The calculation is implemented by addition theorems method. The algebraic equations for calculations of coefficients of screen potential expansion in terms of toroidal functions are obtained. The way of storm-cloud charge influence on electrostatic field near the limiter accounting is described. The field of obtained results application is analyzed too.

**Keywords:** overvoltage limiter, toroidal screen, electrostatic field, addition theorems, electrostatic potential, harmonic toroidal functions, storm-cloud.

**For citation:** Komnatny, D.V. Electrostatic field of overvoltage limiter calculation by addition theorems method / D.V. Komnatny // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 1 (58). – P. 74–78. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2024\\_1\\_58\\_74](https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_74) (in Russian). – EDN: LTQHPX

### Введение

В конструкциях современных линий электропередачи находят широкое применение ограничители перенапряжения, снабженные экранами в виде трех тороидальных деталей из проводника для выравнивания электростатического поля. Такое выравнивание позволяет повысить срок эксплуатации ограничителя [1]–[3].

Для проектирования тороидальных экранов и анализа конфигурации электростатического поля в экранирующих конструкциях предложен метод граничных элементов с кольцевидными граничными элементами [3], [4]. Поскольку этот метод является численным, то анализ электростатического поля конструкции затруднен значительным объемом вычислений. В [5] для тех же целей предложен метод конечных разностей. Но в данном случае требуется применять сетки большой размерности и вводить искусственное ограничение области решения задачи. С учетом особенностей численных методов в [6] предлагается

расчет конструкции экранов ограничителя с помощью максвелловых потенциальных коэффициентов. Но в этом случае тороидальный экран приближенно заменяется кольцевым зарядом.

Современный уровень развития метода разделения переменных дает возможность расчета электростатических полей в областях со сложной конфигурацией границ [7]. В частности, получены решения задачи электростатики для двух проводящих торов [8], для проводящего тора в поперечном, продольном электрических полях и в поле точечного заряда [9], [10], для системы из концентрических проводящего тора и сферического сегмента [11], для системы из соосных тора и плоского круглого диска [12], для тора со специальной моделью материала [13]. Накопленный материал позволяет поставить задачу электростатики для системы трех тороидальных экранов с учетом возможного воздействия на эту систему электростатического поля грозовой тучи и решить ее аналитическим методом.

Таким образом, в статье поставлена цель получения решения задачи электростатики для системы трех проводящих тороидальных экранов аналитическим методом, который позволяет точно учесть конфигурацию граничных поверхностей задачи, а результат решения может применяться для анализа конструкций реального электротехнического устройства.

### 1 Постановка задачи

Так как ограничители напряжения подвешены на мачтах линий электропередач достаточно далеко от земли, то модельная задача для электростатического поля ограничителя ставится без учета влияния поверхности земли [6].

По материалам [6] задача электростатики для конструкции экранов ограничителя может быть поставлена следующим образом.

В пространстве  $R^3$  с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon_0$  (воздух) размещены три круговых тора с малыми радиусами торов  $r_j$  и большими радиусами  $R_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Центры торов  $O_j$  лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости земли. Торы изготовлены из проводящего материала. В общем случае потенциал поверхности  $S_j$  каждого тора  $V_j \neq 0$ .

Наиболее значимым источником внешнего электростатического поля, влияющего на работу ограничителя, является поле заряженных областей грозовых туч. Для учета этого влияния предполагается, что на оси системы торов на значительном отдалении от нее находится точечный электрический заряд  $q$ , который моделирует область грозовой тучи [14]. Такая модель тучи допустима, так как грозовые облака находятся на большой высоте порядка единиц километров.

Область пространства вне торов обозначается  $D$ . В этой области электростатическое поле

описывается потенциальными функциями  $u_j$  для полей торов и потенциальной функцией  $u_0$  для точечного заряда. Суммарный потенциал электростатического поля в  $D$

$$u = \sum_{j=1}^3 u_j + u_0.$$

Для электростатического поля в области  $D$  ставится краевая задача.

Потенциал электростатического поля в области  $D$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } D. \quad (1.1)$$

На поверхностях торов выполняется граничное условие

$$u|_{S_j} = V_j. \quad (1.2)$$

Потенциал в области  $D$  удовлетворяет условию на бесконечности

$$u(M) \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

На основании решения краевой задачи (1.1)–(1.3) требуется определить потенциал электростатического поля в  $D$ .

### 2 Вывод системы уравнений для коэффициентов разложения

Для решения краевой задачи (1.1)–(1.3) с центрами торов  $O_j$  связываются декартова прямоугольная система координат  $x_j, y_j, z_j$  и тороидальная система координат  $\alpha_j, \beta_j, \varphi_j$  (рисунок 2.1).

Декартовы и тороидальные координаты в этих системах связаны соотношениями [8], [15]

$$\alpha_j = \operatorname{arth} \frac{2c_j \sqrt{x_j^2 + y_j^2}}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 + c_j^2},$$

$$\beta_j = \operatorname{arctg} \frac{2c_j z_j}{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - c_j^2}, \quad \varphi_j = \operatorname{arctg} \frac{y_j}{x_j}.$$

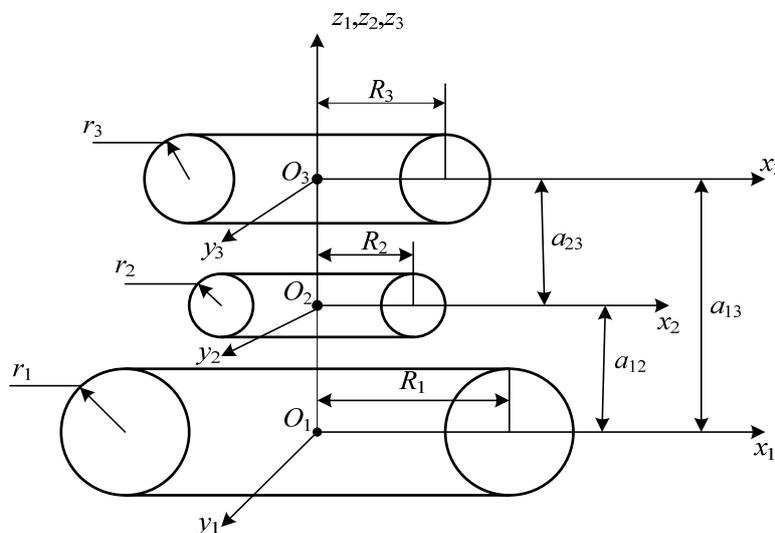


Рисунок 2.1 – Тороидальные экраны с сопутствующими системами координат

В этих системах координат поверхности  $S_j$  описываются соотношениями [8]

$$\alpha_j(S_j) = \xi_j = \ln \left( \frac{R_j}{r_j} - \sqrt{\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^2 - 1} \right), \quad c_j = r_j \operatorname{sh} \xi_j.$$

Потенциалы торов представляются через гармонические тороидальные функции с учетом симметрии задачи [8], [16]

$$u_1 = R(\alpha_1, \beta_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\alpha_1)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\xi_1)} e^{jm\beta_1}, \quad (2.1)$$

$$u_2 = R(\alpha_2, \beta_2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{(2)} \frac{P_{m-\frac{1}{2}}(\alpha_2)}{P_{m-\frac{1}{2}}(\xi_2)} e^{jm\beta_2}, \quad (2.2)$$

$$u_3 = R(\alpha_3, \beta_3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^{(3)} \frac{P_{k-\frac{1}{2}}(\alpha_3)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\xi_3)} e^{jk\beta_3}, \quad (2.3)$$

где  $x$  – неизвестные коэффициенты разложения;  $P_{s-1/2}$  – функции Лежандра;

$$R(\alpha_j, \beta_j) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_j - \cos \beta_j)}.$$

Представления (2.1)–(2.3) удовлетворяют уравнению Лапласа (1.1) и условию на бесконечности (1.3).

Чтобы удовлетворить граничному условию (1.2) для поверхности  $S_1$  потенциалы (2.2) и (2.3), аналогично [8], переразлагаются в системе координат  $\alpha_1, \beta_1, \varphi_1$  с помощью известной теоремы сложения [16], которая осуществляет преобразование в сдвинутой системе координат вниз

$$u_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x_m^{(2)}}{P_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{A_{mn}(c_2, c_1, a_{12})} \times \\ \times R(\alpha_1, \beta_1) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_1) e^{jm\beta_1}, \quad (2.4)$$

$$u_3 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k^{(3)}}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{A_{kn}(c_3, c_1, a_{13})} \times \\ \times R(\alpha_1, \beta_1) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_1) e^{jm\beta_1}, \quad (2.5)$$

где  $a_{12}, a_{13}$  – расстояние между центрами соответствующих торов (рисунок 1),  $m$ ;  $Q_{s-1/2}$  – функция Лежандра.

В (2.4) и (2.5), также в следующих формулах

$$A_{ns}(c_1, c_2, a) = \\ = \frac{2c_1(a + jc_1 + jc_2)^{n+s} \left[ a^2 + (c_1 - c_2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}}{\pi(a + jc_2 - jc_1)^n (a + jc_1 - jc_2)^n} \times \\ \times {}_2F_1 \left( n + \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; 1 \right) - \frac{4c_1c_2}{a^2 + (c_1 - c_2)^2},$$

где  ${}_2F_1$  – гипергеометрическая функция [16].

После подстановки (2.1), (2.4) и (2.5) в (1.2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях экспоненты и при  $\alpha_1 = \xi_1$  получается уравнение для неизвестных коэффициентов разложения потенциала. Правая часть граничного условия преобразуется по известному разложению [17].

$$x_n^{(1)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{(2)} \overline{A_{mn}(c_2, c_1, a_{12})} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_1)}{P_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2)} + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^{(3)} \overline{A_{kn}(c_3, c_1, a_{13})} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_1)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3)} = \\ = \frac{V_1}{\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.6)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (1.2) для поверхности  $S_2$  потенциал (2.1) переразлагается в системе координат  $\alpha_2, \beta_2, \varphi_2$  с помощью известной теоремы сложения [16], которая осуществляет преобразование в сдвинутой системе координат вверх. Потенциал (2.3) переразлагается с помощью известной теоремы сложения [16], которая осуществляет преобразование в сдвинутой системе координат вниз. В результате преобразований, аналогичных вышерассмотренным, получается алгебраическое уравнение для неизвестных коэффициентов разложения

$$x_m^{(2)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} \overline{A_{nm}(c_2, c_1, a_{12})} \frac{Q_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_1)} + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^{(3)} \overline{A_{km}(c_3, c_2, a_{23})} \frac{Q_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3)} = \\ = \frac{V_2}{\pi} Q_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.7)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (1.2) для поверхности  $S_3$  потенциалы (2.1) и (2.2) переразлагаются в системе координат  $\alpha_3, \beta_3, \varphi_3$  с помощью известной теоремы сложения [16], которая осуществляет преобразование в сдвинутой системе координат вверх. В результате получается алгебраическое уравнение для неизвестных коэффициентов разложения

$$x_k^{(3)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} \overline{A_{nk}(c_1, c_3, a_{13})} \frac{Q_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_1)} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{(2)} \overline{A_{mk}(c_2, c_3, a_{23})} \frac{Q_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3)}{P_{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_2)} = \\ = \frac{V_3}{\pi} Q_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \xi_3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6), (2.7), и (2.7) в совокупности образуют бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений (2.1), (2.2) и (2.3), которая может быть разрешена методом редукции [8]. Вычисление функций Лежандра может быть выполнено по известным соотношениям [11], [17]. Расчетное выражение гипергеометрической функции указано в [16].

### 3 Учет потенциала поля грозовой тучи

Расположение точечного заряда  $q$ , моделирующего область грозовой тучи, показано на рисунке 3.1. Расстояния  $b_j$  от центров торов  $O_j$  до точечного заряда  $O_4$  много больше расстояний между центрами торов и их радиусов.

Для учета потенциала указанного заряда требуется в правые части уравнений (2.6), (2.7) и (2.7) ввести выражение этого потенциала в соответствующей тороидальной системе координат с противоположным знаком на основании выражения суммарного потенциала в  $D$  и граничного условия (1.2).

Если с точкой  $O_4$  связать сферическую систему координат  $r_4, \theta_4, \varphi_4$ , то потенциал точечного заряда выражается по формуле [18]

$$u_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4} P_0^0(\cos \theta_4), \quad (3.1)$$

где  $P()$  – полином Лежандра.

Тогда для переразложения потенциала (3.1) в тороидальных системах координат  $\alpha_j, \beta_j, \varphi_j$  применяется метод комбинирования теорем сложения, указанный в [16]. Вначале предполагается,

что с точками  $O_j$  связана вспомогательная сферическая система координат  $r_j, \theta_j, \varphi_j$ . Тогда потенциал (3.1) переразлагается в каждой из этих систем координат с помощью теоремы сложения, связывающей потенциалы в двух сферических системах координат со сдвигом вниз. Теорема сложения выбирается с учетом того, что поле вокруг ограничителя перенапряжения рассматривается в области размером порядка единиц метров, что значительно меньше расстояния от ограничителя до области грозовой тучи. Тогда на основании [16], [18] результат переразложения

$$u_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{b_j^{s+1}} r_j^s P_s(\cos \theta_j). \quad (3.2)$$

Выражение для потенциала точечного заряда (3.2) переразлагается в тороидальной системе координат  $\alpha_j, \beta_j, \varphi_j$  с помощью теоремы сложения 264.3.10 из [16], тогда указанное выражение принимает вид

$$u_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{b_j^{s+1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{sn}^0(c_j) \times \times R(\alpha_j, \beta_j) Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_j) e^{in\beta_j}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что для учета потенциала области грозовой тучи, в правые части уравнений (2.6)–(2.7) должен быть добавлен член

$$u_0(\xi_j) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{b_j^{s+1}} \sum_{n(m,k)=-\infty}^{\infty} T_{sn}^0(c_j) Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \xi_j). \quad (3.4)$$

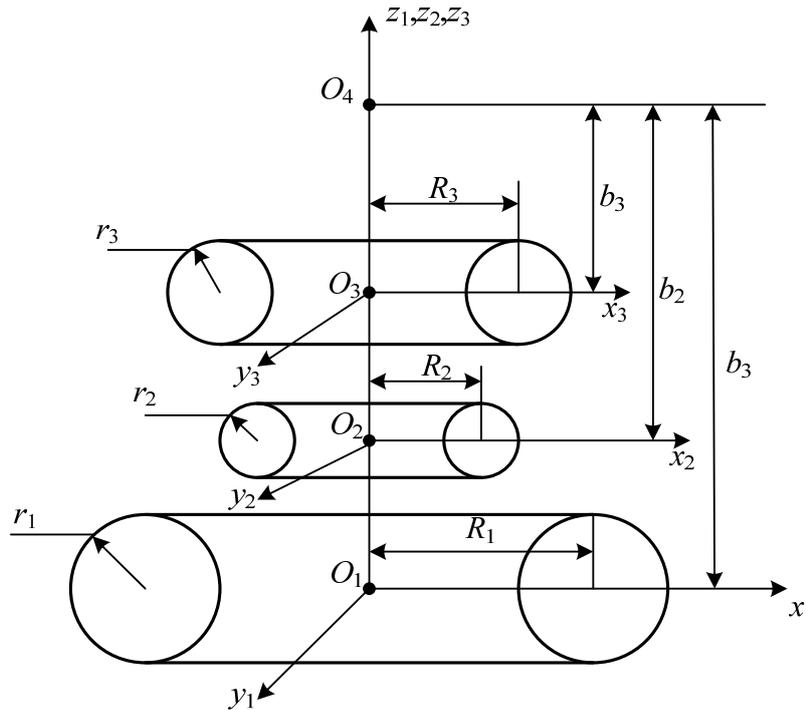


Рисунок 3.1 – Местоположение заряда грозовой тучи относительно ограничителя

В (3.3) и (3.4) на основании [16]

$$T_{sn}^0(c_j) = \frac{j^s c_j^s}{2! \pi} {}_2F_1\left(-s, n + \frac{1}{2}, 1, 2\right).$$

Таким образом, получены выражения для описания потенциала поля точечного заряда, моделирующего область грозовой тучи в тороидальных системах координат, связанных с экранами ограничителя напряжения. Эти выражения позволяют составить систему уравнений для коэффициентов разложения потенциала электростатического поля этих экранов в случае присутствия грозовой тучи над мачтой линии и учесть влияние грозовой тучи на функционирование ограничителя.

### Заключение

В статье показана принципиальная возможность анализа электростатического поля в элементах конструкции линий электропередач – ограничителей напряжения, методом теорем сложения.

По сравнению с методом потенциальных коэффициентов [6] предлагаемый в статье метод позволяет более точно проанализировать распределение потенциала в конструкции ограничителя перенапряжения, учесть влияние внешних источников электростатического поля, которыми на практике оказываются заряженные области грозовых туч.

По сравнению с численными методами [3]–[5] точность предлагаемого метода не ниже, так как на практике система уравнений предлагаемого метода решается методом редукции численно. Все сравниваемые методы обладают сравнимой трудоемкостью при составлении и решении уравнений со специальными функциями.

Предлагаемый метод может применяться при разработке ограничителей напряжения высоких классов напряжения, где требуется высокая точность анализа условий работы экранов, и при разработке ограничителей для грозоактивных местностей. В общем случае метод теорем сложения является перспективным методом решения задач техники высоких напряжений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, Г.И. Изоляция электрических аппаратов высокого напряжения / Г.И. Александров, В.Л. Иванов. – Москва: Энергоатомиздат, 1994. – 207 с.
2. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / И.П. Белоедова [и др.], под ред. Е.С. Колечицкого. – Москва: Издательский дом МЭИ, 2016. – 248 с.
3. Колечицкий, Е.С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / Е.С. Колечицкий. – Москва: Энергоатомиздат, 1983. – 168 с.
4. Гримальский, О.В. Расчет электрических полей изоляционных конструкций / О.В. Гримальский, В.Л. Иванов. – Кишинев: Штиница, 1988. – 106 с.
5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: в 2 т. / П.А. Бутырин [и др.]; под ред. П.А. Бутырина. – Москва: Издательский дом МЭИ, 2013. – Т. 2: Электрические цепи с распределенными параметрами. Электромагнитное поле. – 571 с.
6. Александров, Г.Н. Молния и молниезащита / Г.Н. Александров. – Москва: Наука, 2008. – 274 с.
7. Шушкевич, Г.Ч. Моделирование электростатических полей системы тонких незамкнутых оболочек / Г.Ч. Шушкевич // Научные исследования преподавателей факультета математики и информатики / Гродненский государственный университет им. Янки Купалы. – Гродно, 2010. С. 117–122.
8. Ерофеев, В.Т. Задача электростатики для двух тороидальных проводников / В.Т. Ерофеев // Журнал технической физики. – 1986. – Т. 56, № 8. – С. 1641–1643.
9. Scharstein, R.W. Electrostatic excitation of a conducting toroid: exact solution and thin-wire approximation / R.W. Scharstein, H.B. Wilson // Electromagnetics. – 2005. – Vol. 25, № 1. – P. 1–19.
10. Slivnik, T. Toroid immersed in a homogeneous electric field / T. Slivnik // IEE Proceedings A. – 1983. – Vol. 130, № 5. – P. 261–263.
11. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической оболочки и тора / Г.Ч. Шушкевич // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 7. – С. 1–6.
12. Шушкевич, Г.Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г.Ч. Шушкевич. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
13. Ерофеев, В.Т. Электрическое поле тора со специальной моделью проводящего материала / В.Т. Ерофеев, Д.В. Комнатный // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2023. – № 2. – С. 88–99.
14. Drabkin, M.M. Interaction between lightning channel and CTS / M.M. Drabkin // 1999 IEEE international symposium on Electromagnetic compatibility / IEEE. – N. Y., 1999. – P. 643–645.
15. Неснов, Д.В. Элементы теории поля в тороидальных координатах / Д.В. Неснов // Строительство и техногенная безопасность. – 2019. – № 16. – С. 17–25.
16. Ерофеев, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеев. – Минск: Наука и техника, 1989. – 254 с.
17. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – Москва: ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
18. Ерофеев, В.Т. Основы математического моделирования / В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская. – Минск: БГУ, 2012. – 195 с.

Поступила в редакцию 23.10.2023.

### Информация об авторах

Комнатный Дмитрий Викторович – к.т.н., доцент