**Доклады Академии Наук СССР**
**1940. Том XXVIII, № 6**

*ГИДРАВЛИКА*

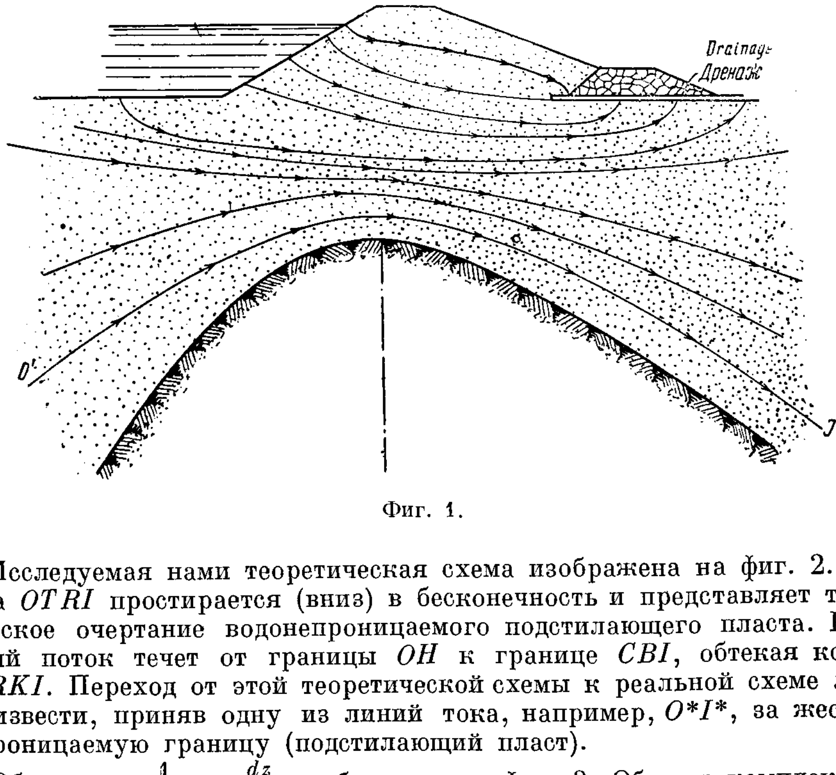
**Ф. Б. НЕЛЬСОН-СКОРНЯКОВ**

# ЗЕМЛЯНАЯ ПЛОТИНА НА ПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ ПРИ НЕГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОДСТИЛАЮЩЕМ ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОМ ПЛАСТЕ

*(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 28 IV 1940)*

Исследуемая схема плотины изображена на фиг. 1.

Подстилающий непроницаемый пласт (скала, глина) — не горизонтальный. Эта схема соответствует встречающимся в практике плотиностроения действительным условиям. Горизонтальный подстилающий непроницаемый пласт встречается сравнительно редко.



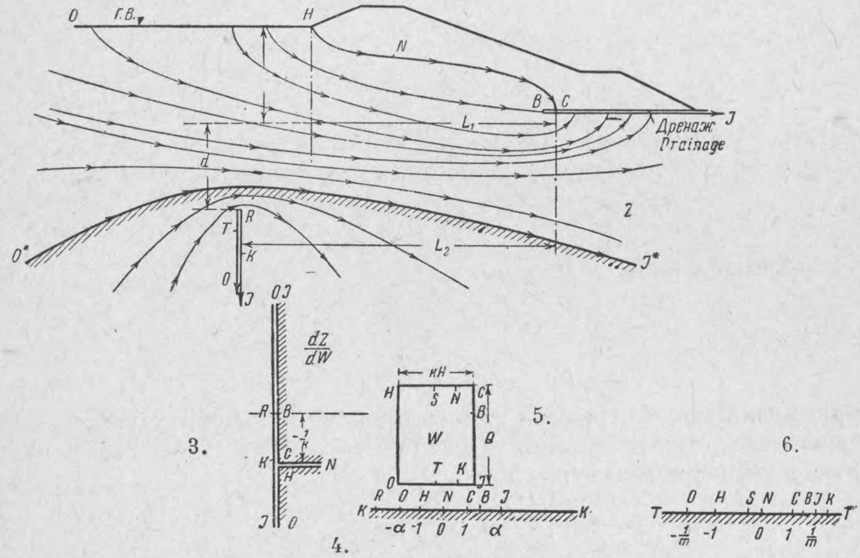

Фиг. 1.

Исследуемая нами теоретическая схема изображена на фиг. 2. Граница $OTRI$ простирается (вниз) в бесконечность и представляет теоретическое очертание водонепроницаемого подстилающего пласта. Грунтовый поток течет от границы $OH$ к границе $CBI$, обтекая контур $OTRKI$. Переход от этой теоретической схемы к реальной схеме легко произвести, приняв одну из линий тока, например, $O^*I^*$, за жесткую непроницаемую границу (подстилающий пласт).

Область $\frac{1}{V_x - iV_y} = \frac{dz}{dW}$ изображена на фиг. 3. Область комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ для исследуемого течения изображена на фиг. 5.

Нам вполне известны области $\frac{dz}{dW}$ и $W$, поэтому для исследования поставленной гидромеханической задачи мы применим метод установления прямой связи между $\frac{dz}{dW}$ и $W$ посредством конформного отображения области $W$ на область $\frac{dz}{dW}$ и получим зависимость вида

$$\frac{dz}{dW} = F(W). \tag{A}$$




Фиг. 2—6.

Интегрируя уравнения (A), установим искомую связь между областью течения и областью комплексного потенциала в виде

$$z = F(W), \tag{B}$$

т. е. найдем характеристическую функцию течения. Отобразим конформно область $\frac{dz}{dW}$, расположенную на римановой поверхности, на нижнюю полуплоскость $\xi$ (фиг. 4) функцией:

$$\frac{dz}{dW} = -\frac{i}{k} + \frac{i}{k} Co \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2 - \alpha^2}. \tag{1}$$

Отобразим конформно область комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (фиг. 5) на нижнюю полуплоскость $\theta$ (фиг. 6) функцией:

$$\theta = sn\left(\frac{2K}{kH} W + K\right), \tag{2}$$

где $sn$ — эллиптическая функция Якоби, $K$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, $k$ — коэффициент фильтрации грунта.

Произведем дробно-линейное преобразование полуплоскости $\theta$ в полуплоскость $\xi$ функцией

$$\xi = \frac{(1 + m\theta)(1 - m) + (\theta - 1) m (\alpha - 1)}{(1 + m\theta)(1 - m) - (\theta - 1) m \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)}, \tag{3}$$

причем точки $O$, $C$ и $I$ полуплоскости $\theta$ переходят в одноименные точки полуплоскости $\xi$.

Функция $\xi$, выражаемая уравнением (3), отображает конформно полуплоскость $\theta$ в полуплоскость $\xi$ при условии

$$\alpha=\frac{1}{m}, \tag{4}$$

что, как нетрудно видеть, приводит к зависимости

$$\xi=\theta. \tag{5}$$

На основании уравнений (2) и (5) следует:

$$\xi=sn\left(\frac{2K}{kH}W+K\right). \tag{6}$$

Подставив (4) и (6) в уравнение (1), получим:

$$\frac{dz}{dW}=-\frac{i}{k}-\frac{1m^2}{km_1}Co\cdot sn\left(\frac{2K}{kH}W\right)dn\left(\frac{2K}{kH}W\right). \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (7) и определяя постоянные из условия расположения начала координат в области $z$ в точке $C$, получим:

$$z=-\frac{i}{k}W-\left[cn\left(\frac{2K}{kH}W\right)-1\right]\frac{L_1}{2}. \tag{8}$$

Постоянные равны:

$$Co=\frac{m_1KL_1}{m^2H}, \tag{9}$$

$$C=\frac{L_1}{2}. \tag{10}$$

Уравнения для построения гидромеханической сетки течения получим из уравнения (8), подставив в него $W=\varphi+i\psi$ и $z=x+iy$ и отделив мнимые и вещественные части:

$$x=\frac{\psi}{k}-\lambda cn\left(\frac{2K}{kH}\varphi,\ m\right)cn\left(\frac{2K}{kH}\psi,\ m_1\right)\frac{L_1}{2}+\frac{L_1}{2}, \tag{11}$$

$$y=-\frac{\varphi}{k}-\lambda sn\left(\frac{2K}{kH}\psi,\ m_1\right)dn\left(\frac{2K}{kH}\psi,\ m_1\right)\times$$

$$\times sn\left(\frac{2K}{kH}\varphi,\ m\right)dn\left(\frac{2K}{kH}\varphi,m\right)\cdot\frac{L_1}{2}, \tag{12}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{cn^2\left(\frac{2K}{kH}\psi,\ m_1\right)+m^2sn^2\left(\frac{2K}{kH}\varphi,\ m\right)sn^2\left(\frac{2K}{kH}\psi,\ m_1\right)}.$$

Уравнение свободной поверхности получим из уравнения (8), подставив в него $W=\varphi=-ky$:

$$x=-cn\left(\frac{2K}{kH}y\right)\frac{L_1}{2}+\frac{L_1}{2}. \tag{13}$$

Характерные точки свободной поверхности: 1) $y=0$; $x=0$; 2) $y=\frac{H}{2}$; $x=\frac{L_1}{2}$; 3) $y=\frac{H}{4}$; $x=-\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}}\cdot\frac{L_1}{2}+\frac{L_1}{2}$; 4) $y=\frac{3}{4}H$; $x=\frac{m_1}{m}\sqrt{\frac{1-m_1}{m_1}}\cdot\frac{L_1}{2}+\frac{L_1}{2}$; 5) $y=H$; $x=L_1$. Определим величину фильтрационного расхода, протекающего через плотину и основание. Для этого напишем уравнение (8) для точки $I$. В точке $I$ $W_I=iQ$ и $z_I=\infty$;

$$\infty=\frac{Q}{k}-\left[cn\left(i\frac{2K}{kH}Q\right)-1\right]\frac{L_1}{2},$$

откуда следует

$$Q=\frac{kH}{2}\cdot\frac{K'}{K}. \tag{14}$$

Определим ординату наивысшей точки $R$ водонепроницаемого подстилающего пласта, для чего напишем уравнение (1) для точки $R$:

$$\frac{m_1 K}{m^2 H} L_1 \cdot \frac{\sqrt{\xi_R^2 - 1}}{\left(\xi_R^2 - \frac{1}{m^2}\right)} = 1. \tag{15}$$

Параметр $\xi_R$ представляет величину чисто вещественную и отрицательную, при этом должно быть выполнено условие

$$|\xi_R| > \left|\alpha = \frac{1}{m}\right|,$$

поэтому, решая уравнение (15), получим выражение для $\xi_R$:

$$\xi_R = -\frac{1}{m\sqrt{H}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2m^2H^2 + m_1^2K^2L_1^2}{2m^2H} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2m^2H^2 + m_1^2K^2L_1^2}{m^2H}\right)^2 - 4\left(H^2 + m_1^2K^2L_1^2\right)}}. \tag{16}$$

Комплексный потенциал в точке $R$ равен $W_R = \varphi_R + iQ = \varphi_R + i\frac{kHK'}{2K}$ и $z_R = L_2 + id$. Напишем уравнение (8) для точки $R$ и после преобразований получим:

$$L_2 + id = -i\frac{\varphi_R}{k} + \frac{Q}{k} + i\frac{dn\left(\frac{2K}{kH}\varphi_R\right)L_1}{2m\, sn\left(\frac{2K}{kH}\varphi_R\right)} + \frac{L_1}{2}. \tag{17}$$

Отделив вещественные и мнимые части уравнения (17), получим:

$$Q = \frac{k}{2}(2L_2 - L_1), \tag{18}$$

$$d = -\frac{\varphi_R}{k} + \frac{dn\left(\frac{2K}{kH}\varphi_R\right)L_1}{2m\, sn\left(\frac{2K}{kH}\varphi_R\right)}. \tag{19}$$

Из уравнений (14) и (18) следует:

$$\frac{K'}{K} = \frac{1}{H}(2L_2 - L_1). \tag{20}$$

Из уравнения (20) следует, что при заданных $L_1$, $L_2$ и $H$ непосредственно определяются: 1) отношение эллиптических интегралов $\frac{K'}{K}$; 2) полные эллиптические интегралы $K$ и $K'$; 3) модули эллиптических интегралов $m$ и $m_1 = \sqrt{1 - m^2}$; 4) полный фильтрационный расход $Q = \frac{kH}{2}\frac{K'}{K}$. Напишем уравнение (6) для точки $R$:

$$\xi_R = sn\left(\frac{2K}{kH}W_R + K\right) = sn\left[\frac{2K}{kH}\left(\varphi_R + i\frac{kH}{2}\frac{K'}{K}\right) + K\right],$$

откуда находим после преобразований:

$$\varphi_R = \left[sn^{-1}\left(\frac{1}{m\xi_R}\right) - K\right]\frac{kH}{2K}. \tag{21}$$

Подставив ($\varphi_R$) из (21) в (19), получим величину параметра $d$ (координата наивысшей точки $R$ водонепроницаемого подстилающего пласта):

$$d = -\left[sn^{-1}\left(\frac{1}{m\xi_R}\right) - K\right]\frac{H}{2K} + \frac{dn\left[sn^{-1}\left(\frac{1}{m\xi_R}\right) - K\right]}{m\, sn\left[sn^{-1}\left(\frac{1}{m\xi_R}\right) - K\right]} \cdot \frac{L_1}{2}. \tag{22}$$

Определим величину фильтрационного расхода $Q_0$, притекающего к дренажу сверху, и длину $l_{\partial p}$.

Написав уравнение (1) для точки $B$:

$$\frac{m_1 K L_1 \sqrt{\xi_B^2 - 1}}{m^2 H\left(\xi_B^2 - \frac{1}{m^2}\right)} = 1 \tag{23}$$

и решая уравнение (23), получим выражение для параметра $\xi_B$:

$$\xi_B = \frac{1}{m\sqrt{H}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2m^2H^2 + m_1^2K^2L_1^2}{2m^2H} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2m^2H^2 + m_1^2K^2L_1^2}{m^2H}\right)^2 - 4\left(H^2 + m_1^2K^2L_1^2\right)}}. \tag{24}$$

На основании уравнения (6) для точки $B$ можем написать:

$$\xi_B = sn\left(i\frac{2K}{kH}Q_0 + K\right) = \frac{1}{dn\left(\frac{2K}{kH}Q_0\right)},$$

откуда находим:

$$Q_0 = \left[dn^{-1}\left(\frac{1}{\xi_B}\right)\right]\frac{kH}{2K}. \tag{25}$$

Напишем уравнение (8) для точки $B$:

$$z_B = l_{\partial p} = \frac{Q_0}{k} - \left[cn\left(i\frac{2K}{kH}Q, m\right) - 1\right]\frac{L_1}{2} =$$

$$= \frac{Q_0}{k} - \frac{L_1}{2}\left[\frac{1}{cn\left(\frac{2K}{kH}Q_0, m_1\right)} - 1\right]. \tag{26}$$

Подставив (25) в (26), получим величину $l_{\partial p}$, выраженную через $L_1$; $L_2$ и $H$:

$$l_{\partial p} = \frac{H}{2K}\cdot dn^{-1}\left(\frac{1}{\xi_B}\right) - \frac{L_1}{2}\left[\frac{1}{cn\left[dn^{-1}\left(\frac{1}{\xi_B}\right);\ m_1\right]} - 1\right]. \tag{27}$$

Уравнения (8), (18), (22) и (27) полностью решают поставленную задачу для плотины без диафрагмы.

З а д а ч а о д в и ж е н и и г р у н т о в о й в о д ы ч е р е з п л о т и н у с ц е н т р а л ь н о й д и а ф р а г м о й (фиг. 7) н а п р о н и ц а е м о м о с н о в а н и и, п о д с т и л а е м о м н е г о р и з о н т а л ь н ы м в о д о у п о р о м, решается аналогично.

В этом случае область $\frac{dz}{dW}$, расположенная на 3 листах римановой поверхности, отображается на полуплоскость $\xi$ функцией (фиг. 8 и 9):

$$\frac{dz}{dW} = -\frac{i}{k} + \frac{i}{k}C_0\frac{(\xi - \xi_k)(\xi - \xi_p)\sqrt{1 - \frac{1}{\xi}}}{(\xi - \xi_I)}. \tag{28}$$

Прямоугольник комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ отображается на ту же полуплоскость $\xi$ функцией:

$$\xi = 1 - \frac{m\,cn\left(\frac{2K}{kH}W_s\right) + dn\left(\frac{2K}{kH}W_s\right)}{cn\left(\frac{2K}{kH}W_s\right) - dn\left(\frac{2K}{kH}W_s\right)} \times \frac{cn\left(\frac{2K}{kH}W\right) - dn\left(\frac{2K}{kH}W\right)}{m\,cn\left(\frac{2K}{kH}W\right) + dn\left(\frac{2K}{kH}W\right)}, \tag{29}$$

где $W_s$—комплексный потенциал в точке $S$, $K$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле $m$; $cn$, $dn$ — эллиптические функции Якоби; $\xi_k$, $\xi_p$, $\xi_I$ — параметры области $\xi$.

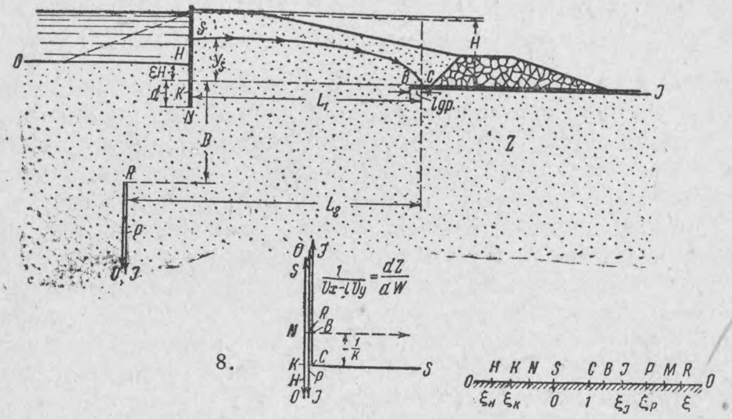
Уравнение характеристической функции течения для плотины с центральной диафрагмой имеет вид:

$$z = -\frac{i}{k}W + \frac{i}{k}C_0 \cdot \int \frac{(\xi-\xi_k)(\xi-\xi_p)}{(\xi-\xi_I)} \sqrt{1-\frac{1}{\xi}} \cdot dW + C. \tag{30}$$

Величина фильтрационного расхода в этом случае также выражается уравнением:

$$Q = \frac{kHK'}{2K}.$$

Интеграл уравнения (30) в конечном виде не берется и вычисляется приближенными методами.



7. 8. 9.

Фиг. 7—9.

Для практически важных для производства случаев при сравнительно малых величинах фильтрационного расхода $Q$ модуль эллиптических функций $m \backsim 1$, и в этих случаях решение получается в гиперболических функциях. Решение для этих случаев дано в предыдущих работах автора ([1]). В случае проницаемого основания бесконечной глубины решение получается в элементарных функциях как для плотины без диафрагмы, так и для плотины с центральной диафрагмой. Решения эти даны в предыдущих работах автора ([2],[3]).

Поступило
3 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Прикл. мех. и мат. (в печати).
[2] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Изв. Отд. техн. наук АН СССР, № 7 (1940).
[3] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Гидротехн. строит., № 2 (1937).