Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 6

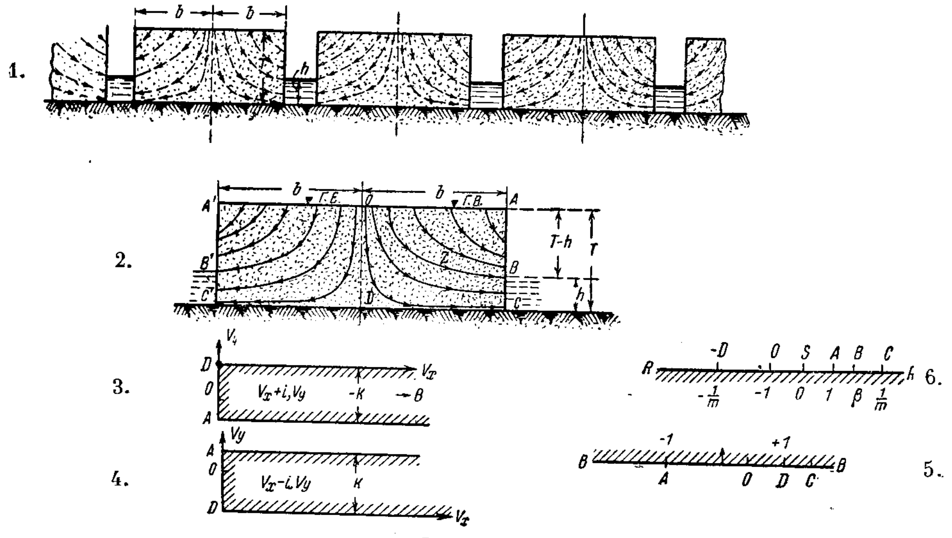
ГИДРАВЛИКА

Ф. Б. НЕЛЬСОН-СКОРНЯКОВ

ПРИТЕКАНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ К ДРЕНАЖНЫМ КАНАЛАМ НА ВОДОУПОРЕ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 22 VI 1940)

Исследуем общий случай притекания воды к дренажным каналам (осушителям) с поверхности земли. Схема течения грунтового потока для исследуемого общего случая изображена на фиг. 1. Ввиду симметричного притекания воды к дренажным каналам из каждой секции грунта, ограниченной с обеих сторон дренами, мы выделим типовую секцию $A_1OABCDC_1B_1A_1$ и исследуем течение в этой секции (фиг. 2). Внутри каждой секции $A_1OABCDC_1B_1A$ грунтовый поток течет от поверхности грунта A_1OA к вертикальным откосам $A_1B_1C_1$ и ABC дренажных каналов, в которых имеется вода на некоторую глубину h.



Фиг. 1—6.

Осью симметрии течения является вертикаль OD. Поэтому можем исследовать течение в одной из двух симметричных секций, например, в правой секции $ODCBAO$. Очевидно, полученное решение для правой секции будет также решением и для левой секции. Область комплексной скорости для течения в секции $OABCDO$ изображается на фиг. 3 полуполосой. Область сопряженной комплексной скорости $V_x - iV_y = \frac{dW}{dz}$ изображается на фиг. 4 полуполосой. Область течения грунтового потока z секции $OABCDO$ представляет прямоугольник со сторонами b и T.

Произведем конформное преобразование области z в область $\frac{dW}{dz}$, введя вспомогательную полуплоскость ξ (фиг. 5).

Полуполоса $\left(\text{область } \frac{dW}{dz}\right)$ (фиг. 4) отображается на полуплоскость ξ элементарной функцией:

$$\xi = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{k}\frac{dW}{dz}\right), \tag{1}$$

где k — коэффициент фильтрации.

Прямоугольник (область z) (фиг. 2) отображается на полуплоскость Θ (фиг. 6) эллиптической функцией:

$$\Theta = sn\left[\frac{2K}{b}z - K\right], \tag{2}$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода, m — модуль эллиптического интеграла, sn — эллиптическая функция Якоби.

Произведя дробно-линейное преобразование полуплоскости Θ в полуплоскость ξ, получим:

$$\frac{\xi+1}{2} = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{k}\frac{dW}{dz}\right)+1}{2} = \frac{(\Theta-1)(1+m\beta)}{(\Theta-\beta)(1+m)} \tag{3}$$

или, после приведения,

$$\frac{dW}{dz} = \frac{2K}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{(1+m\beta)(\Theta-1)}{(1+m)(\Theta-\beta)}}. \tag{4}$$

Напишем уравнение (2) для точки B, учитывая, что

$$z_B = b + i(T-h); \quad \Theta_B = \beta:$$

$$\beta = sn\left[\frac{2\{b+i(T-h)K\}}{b} - K\right] = \frac{1}{dn\left[\frac{2(T-h)}{b}K;\, m_1\right]}. \tag{5}$$

Итак, параметр β определяется по уравнению (5), где dn — эллиптическая функция Якоби, K — полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле m, m_1 — дополнительный модуль, равный $\sqrt{1-m^2}$. Модуль эллиптических интегралов m определим, написав уравнение (2) для точки C, учитывая, что $\Theta_c = \frac{1}{m}$ и $Z_c = (iT+b)$:

$$\frac{1}{m} = sn\left[2\frac{(iT+b)}{b}K - K\right]. \tag{6}$$

Но, как известно, $\frac{1}{m} = sn(K+iK')$, поэтому уравнение (6) напишется:

$$sn\left[2\frac{(iT+b)}{b}K - K\right] = sn(K+iK'), \tag{6a}$$

откуда следует

$$\frac{2(iT+b)}{b}K - K = K + iK' \tag{6b}$$

или

$$\frac{b}{2T} = \frac{K}{K'}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) при известных b (полурасстояние между дренажными каналами) и T (глубина дрены от поверхности грунта до водоупора) определяется отношение $\frac{K}{K'}$ и, следовательно, по таблицам эллиптических интегралов прямо определяется модуль m.

Подставив значение β из (5) и Θ из (2) в уравнение (4), после простых преобразований получим:

$$\frac{dW}{dz}=k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\beta}+m\right)\left[cn\frac{2K}{b}Z+dn\frac{2K}{b}Z\right]}{(1+m)\left[\frac{1}{\beta}cn\frac{2K}{b}Z+dn\frac{2K}{b}Z\right]}}. \tag{8}$$

Уравнение (8) позволяет определить скорость в любой точке области течения Z, так как $\frac{dW}{dz}=V_x-iV_y$.

Определим скорость по границе поверхности грунта OA. На границе OA: $W_{OA}=\varphi_{OA}+i\psi=\text{const}+i\psi$; $dW=id\psi$; $z_{OA}=x$; $dz=dx$.

Уравнение (8) для границы OA напишется:

$$i\frac{d\psi}{dx}=iV_y=k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\beta}+m\right)\left[cn\frac{2K}{b}x+dn\frac{2K}{b}x\right]}{(1+m)\left[\frac{1}{\beta}cn\frac{2K}{b}x+dn\frac{2K}{b}x\right]}}. \tag{9}$$

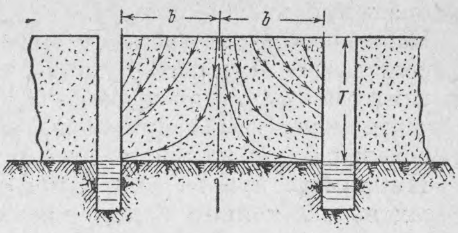
Скорость в точке O, в центре расстояния между дренами, определится из уравнения (9) при $x=0$:

$$iV_{y_0}=k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{\beta}+m\right)}{(1+m)\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}}. \tag{10}$$

Величина фильтрационного расхода, поступающего в дренаж по всей границе OA, выразится уравнением

$$Q=k\frac{2}{\pi}\int_0^b\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\beta}+m\right)\left[cn\frac{2K}{b}x+dn\frac{2K}{b}x\right]}{(1+m)\left[\frac{1}{\beta}cn\frac{2K}{b}x+dn\frac{2K}{b}x\right]}}\,dx. \tag{11}$$

Случай отсутствия подпора воды в дрене ($h=0$). Этот случай (повидимому, весьма редкий в практике) может иметь место, когда дренажный канал заглублен в подстилающий водоупор на достаточную глубину, так что фильтрационная вода стекает полностью в канаву, целиком расположенную в водонепроницаемом грунте, и не поднимается выше отметки поверхности водоупора (фиг. 7).



Фиг. 7.

В этом случае $h=0$ и уравнение (4) для скорости напишется:

$$\frac{dW}{dz}=k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{2m\left[cn\frac{2K}{b}Z+dn\frac{2K}{b}Z\right]}{(1+m)\left[m\,cn\frac{2K}{b}Z+dn\frac{2K}{b}Z\right]}}, \tag{12}$$

так как при $h=0$ $\beta=\frac{1}{m}$, что прямо следует из уравнений (5) и (7).

Для границы OA уравнение (12) напишется:

$$i\frac{d\psi}{dx} = iV_y = k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{2m\left[cn\frac{2K}{b}x + dn\frac{2K}{b}x\right]}{(1+m)\left[m\,cn\frac{2K}{b}x + dn\frac{2K}{b}x\right]}}. \qquad (13)$$

В точке O скорость будет равна $(x=0)$

$$iV_{y_0} = k\frac{2}{\pi}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{4m}{(m+1)^2}}. \qquad (14)$$

Величина фильтрационного расхода в общем случае $(h \neq 0)$ определяется из уравнения (11) методом численного интегрирования. Для практических соотношений $\frac{b}{T} \geqslant 2{,}5$, т. е. при расстоянии между дренами $2b \geqslant 5T$, модуль эллиптических интегралов весьма близок к единице (при $\frac{b}{2T} = 2{,}510$ модуль $m = 0{,}996995$). Приняв $m \cong 1$, подинтегральную функцию не представляет затруднения выразить через гиперболические функции*.

Фиг. 8.

Случай одностороннего притекания к дрене $(b=\infty)$. В случае одностороннего притекания к дрене исследованного типа, т. е. в случае $b=\infty$ (фиг. 8), эллиптические функции вырождаются в элементарные и для скорости на границе вертикального откоса дрены получим выражение

$$\frac{dW}{dz} = V_x - iV_y = k\frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\frac{y}{T}\right) + ik \qquad (16)$$

и для фильтрационного расхода

$$Q = k\frac{2}{\pi}\int_0^T \ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\frac{J}{T}\right)\right]dy \approx 0{,}743\,Tk. \qquad (17)$$

Этот случай был исследован нами изложенным методом конформных отображений в 1935/36 г. (1).

Исследование полученного общего решения устанавливает, что вода в дрене может оказывать существенное влияние на режим фильтрации — на эпюру скоростей по границе OA (поверхность грунта между дренами) и на величину фильтрационного расхода воды, фильтрующей в дрену, следовательно, и на время отвода воды.

Например, при $b=3{,}2\ T$ и $h=0{,}5\ T$ величина скорости в точке O (середина расстояния между дренами) равна $V_0 = 0{,}0102\ k$. В случае отсутствия воды в дрене $(h=0)$ скорость в этой же точке равна $0{,}0165\ k$, т. е. на 60% больше. Соответственно, конечно, изменяется и величина фильтрационного расхода. Поэтому необходимо при расчете дрен принимать во внимание возможный подпор воды, находящейся в дренах. В новейшей литературе мы находим расчеты скоростей по

* Для производственных расчетов важно в первую очередь определить эпюру скоростей по границе поверхности грунта между дренами по формуле (9) в общем случае и по формуле (13) в случае $h=0$ для определения времени, потребного на отвод воды. Величину фильтрационного расхода возможно и не определять по формуле (11), а определить ее графически по эпюре скоростей, что совершенно достаточно для практических целей. Глубина воды h в дрене зависит от Q и от ширины дрены.

громоздким сложным формулам, произведенные с точностью до четвертого знака после запятой. В то же время вопросу о влиянии воды в дрене на режим фильтрации не уделено совершенно никакого внимания, тогда как подпор воды в дрене может повлиять на величину скоростей весьма существенно.

Поступило
3 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины (1936).