Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Дж. Х. КАРИМОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VI 1940)

Настоящая статья является развитием работы «О периодических решениях нелинейных уравнений параболического типа» (ДАН, XXV, № 1, 1939 г.). В упомянутой работе было рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}t=\Phi(x,t)+\mu f(Z)$$

при условиях

$$Z(0,t)=Z(1,t);\quad Z(x,0)=Z(x,1)$$

и доказаны, при некоторых ограничениях, накладываемых на μ, $\Phi(x,t)$ и $f(Z)$, существование и единственность решения.

В этой части работы рассматривается более общее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}\right]-\frac{\partial Z}{\partial t}=\Phi(x,t)+\mu f(Z) \tag{1}$$

в области

$$\overline{D}=D\quad\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}.$$

Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\left.\begin{aligned}Z(0,t)=Z(\pi,t)=0,\\ Z(x,0)=Z(x,1).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть функция $P(x)$ является функцией непрерывной, вместе с производными $P'(x)$, $P''(x)$ в области $\overline{D}$ и

$$P(x)\geqslant k>0;\quad P'(x)\neq 0.$$

Функция $\Phi(x,t)$ непрерывная функция в области $\overline{D}$, вместе с частной производной

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\Phi_1(x,t),$$

периодическая по t с периодом равным единице

$$\Phi(x,t+1)=\Phi(x,t)$$

и разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям ортогональной и нормальной системы $\{X_n(x)\}$

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) \cdot X_n(x),$$

где

$$\Phi_n(t) = \int_0^{\pi} \Phi(\eta, t) \cdot X_n(\eta)\, d\eta.$$

Здесь функции

$$X_1(x);\ X_2(x);\ \ldots;\ X_n(x);\ \ldots$$

являются фундаментальными функциями уравнения Штурм-Луивилля

$$\frac{d}{dx}\left[P(x) \cdot \frac{dX_n}{dx}\right] + \lambda_n X_n = 0$$

с граничными условиями

$$X_n(0) = X_n(\pi) = 0$$

и λ_n — им соответствующие характеристические числа.

Эти условия, которым удовлетворяет функция $\Phi(x, t)$, будем в дальнейшем называть условиями «А».

Теорема. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает единственное непрерывное решение, вместе с частными производными второго порядка* * *в области* $\overline{D}$, *удовлетворяющее условиям* (2), *периодическое относительно аргумента* t *с периодом равным единице, если:*

1. *Функция* $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет условиям* А.
2. $|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M |Z_1 - Z_2|$; $f(0) = 0$.
3. *Абсолютное значение параметра* μ *достаточно мало.*

Будем решать эту задачу методом последовательных приближений. За начальное (нулевое) приближение $Z_0(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x) \cdot \frac{\partial Z_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial Z_0}{\partial t} = \Phi(x, t), \tag{3}$$

удовлетворяющее условиям (2).

Решение этого уравнения будет вида

$$Z_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^0(t)\, X_n(x), \tag{4}$$

где

$$T_n^0(t) = \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta}{1 - e^{\lambda_n}} \int_0^{\pi} \Phi(\eta, \zeta) \cdot X_n(\eta)\, d\eta - \int_0^t e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta \int_0^{\pi} \Phi(\eta, \zeta) \cdot X_n(\eta)\, d\eta.$$

Не трудно убедиться, что $Z_0(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) и является непрерывной функцией, вместе с частными производными второго порядка в области $\overline{D}$, периодическая по t с периодом равным единице.

Зная $(k-1)$-ое приближение $Z_{k-1}(x, t)$, ищем k-ое приближение $Z_k(x, t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x) \cdot \frac{\partial Z_k}{\partial x}\right] - \frac{\partial Z_k}{\partial t} = \Phi(x, t) + \mu f(Z_{k-1}) \tag{5}$$

при условиях (2).

---

* Именно: первая производная по t и первая и вторая производная по x.

Это приближение будет вида

$$Z_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^k(t) \cdot X_n(x), \tag{6}$$

где

$$T_n^k(t) = \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta}{1 - e^{\lambda_n}} \int_0^\pi [\Phi(\eta, \zeta) + \mu f(Z_{k-1})]\, X_n(\eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^t e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta \int_0^\pi [\Phi(\eta, \zeta) + \mu f(Z_{k-1})]\, X_n(\eta)\, d\eta.$$

Причем $Z_k(x, t)$ является функцией непрерывной вместе с производными $\frac{\partial Z_k}{\partial x}$; $\frac{\partial Z_k}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 Z_k}{\partial x^2}$, в области $\overline{D}$, периодической по t с периодом равным единице, и удовлетворяет условиям (2).

Существует предел $Z_k(x, t)$, когда $k \to \infty$

$$\lim_{k \to \infty} Z_k(x, t) = Z(x, t),$$

и этот предел дает решение поставленной задачи.

Для доказательства этого предложения достаточно исследовать ряд

$$Z = Z_0 + (Z_1 - Z_0) + \ldots + (Z_k - Z_{k-1}) + \ldots \tag{7}$$

Ряд (7) абсолютно и равномерно сходится в области $(\overline{D})$. В самом деле

$$|Z_k - Z_{k-1}| \leqslant |\mu| \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \left\{ \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta}{1 - e^{\lambda_n}} \int_0^\pi [f(Z_{k-1}) - f(Z_{k-2})]\, X_n(\eta)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^t e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta \int_0^\pi [f(Z_{k-1}) - f(Z_{k-2})]\, X_n(\eta)\, d\eta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant B^2 \cdot |\mu| \cdot \pi \cdot N \cdot \sup |Z_{k-1} - Z_{k-2}| \left[\sum_{n=0}^{n_0} \frac{|1 - 2e^{-\lambda_n t}|}{|\lambda_n|} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right].$$

Или

$$\sup |Z_k - Z_{k-1}| \leqslant Q \sup |Z_{k-1} - Z_{k-2}|, \tag{8}$$

где

$$Q = B^2 \cdot N \cdot C \cdot |\mu| \cdot \pi; \quad N = \sup |f'|; \quad C = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|1 - 2e^{-\lambda_n t}|}{|\lambda_n|} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n};$$

$$B > |X_n(x)|; \quad \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{dX_n}{dx} \right|; \quad \left| \frac{1}{n^2} \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right|.$$

Полагая в формуле (8) $k = 2$; $k = 3$ и так далее, получим:

$$|Z_2 - Z_1| \leqslant Q \sup |Z_1 - Z_0|,$$
$$|Z_3 - Z_2| \leqslant Q^2 \sup |Z_1 - Z_0|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|Z_k - Z_{k-1}| \leqslant Q^{k-1} \sup |Z_1 - Z_0|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом числовой ряд является мажорантным рядом по отношению к ряду (7), и для достаточно малых значений μ он является сходящимся, и, следовательно, ряд (7) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. В силу этого можно написать, что

$$Z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \left\{ \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta}{1 - e^{\lambda_n}} \int_0^{\pi} [\Phi(\eta, \zeta) + \mu f(Z)]\, X_n(\eta)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta \int_0^{\pi} [\Phi(\eta, \zeta) + \mu f(Z)]\, X_n(\eta)\, d\eta \right\}.$$

Далее, не трудно убедиться, что ряды

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 Z_k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_{k-1}}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Z_k}{\partial x} - \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Z_k}{\partial t} - \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial t} \right] \end{aligned}\right\} \qquad [Z_{-1} \equiv 0]$$

также абсолютно и равномерно сходятся в области $\overline{D}$.

Остается показать, что найденное решение $Z(x, t)$ является единственным.

Допустим, что существует два различных непрерывных решения Z и V уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2); тогда разность $Z - V = K$ будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x) \frac{\partial K}{\partial x} \right] - \frac{\partial K}{\partial t} = \mu\, [f(Z) - f(V)]$$

и точно так же решением интегрального уравнения

$$K(x, t) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta}{1 - e^{\lambda_n}} \int_a^{\pi} [f(z) - f(v)] X_n(\eta)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^t e^{\lambda_n(\zeta - t)}\, d\zeta \int_0^{\pi} [f(z_0) - f(v)]\, X_n(\eta)\, d\eta \right\}.$$

Оценивая $K(x, t)$ по модулю, получим

$$\sup|Z - V| \leqslant |\mu| \cdot B^2 \cdot N \cdot \pi \cdot C \cdot \sup|Z - V|,$$

что невозможно для

$$|\mu| < \frac{1}{B^2 \cdot N \cdot \pi \cdot C}.$$

Следовательно,

$$Z \equiv N.$$

Тем самым теорема доказана.

Узбекистанский государственный университет
Самарканд

Поступило
2 VI 1940