Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 VI 1940)

Не так давно мы указали (1) новые операции, позволяющие без существенных усложнений переходить от данного дифференциального уравнения к соответствующему более точному, чем прежние, разностному уравнению. Мы показали (2) также, что прием замены дифференциального уравнения системой конечных уравнений всегда применим при нахождении характеристических чисел.

На практике при применении конечно-разностного метода встречается значительное затруднение, связанное с раскрытием некоторого определителя, корни которого приближенно равны характеристическим числам задачи. Едва ли следует отмечать, что применение более точных конечно-разностных уравнений позволит снизить без ущерба для точности порядок интересующего нас определителя и что полезно составление новых быстро приводящих к цели конечно-разностных уравнений. Здесь мы даем новые конечно-разностные уравнения со значительной степенью точности.

Функция $Y(a+th)$, принимающая $2r+1$ данное значение при различных значениях t: $t_0=0,\ \pm t_1,\ \pm t_2,\ \ldots,\ \pm t_r$, может быть представлена с помощью интерполяционной формулы Лагранжа следующим образом:

$$Y(a+th)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r}\frac{P_i(t)}{t_iP_i(t_i)}\{(t+t_i)\,Y(a+t_ih)+(t-t_i)\,Y(a-t_ih)\}+R, \tag{1}$$

где

$$R=h^{2r+1}P(t)\,Y(a+th,\ a,\ a\pm t_1h,\ \ldots,\ a\pm t_rh),$$

$$P(t)=t\,(t^2-t_1^2)\ \ldots\ (t^2-t_r^2),$$

$$P_i(t)=\frac{P(t)}{t^2-t_i^2},$$

а символ $Y(a+th,\ a,\ a\pm t_1h,\ \ldots,\ a\pm t_rh)$ обозначает $(2r+1)$-ую разделенную разность функции $Y(a+th)$.

С помощью формулы Тейлора, в которой остаточный член взят в интегральной форме, получается:

$$Y(a+\alpha h)\pm Y(a-\alpha h)=\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{1\pm(-1)^{\lambda}}{\lambda!}\alpha^{\lambda}h^{\lambda}Y^{(\lambda)}(a)+$$

$$+\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-1}\left[Y^{(n)}(a+th)+Y^{(n)}(a-th)\right]dt, \tag{2}$$

где верхние знаки соответствуют четным, а нижние нечетным значениям n.

Подставим в (1) $Y^{(n)}(a+th)$ вместо $Y(a+th)$, и $\pm h$ вместо h и вычислим сумму полученных выражений.

Подставляя в (2) разложение суммы $Y^{(n)}(a+th)+Y^{(n)}(a-th)$, найдем

$$Y(a+\alpha h)\pm Y(a-\alpha h)=\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{1\pm(-1)^{\lambda}}{\lambda!}\alpha^{\lambda}h^{\lambda}Y^{(\lambda)}(a)+$$

$$+\frac{h^{n}}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{r}A_i\,\{Y^{(n)}(a+t_ih)+Y^{(n)}(a-t_ih)\}+R, \qquad (3)$$

где

$$A_i=\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-1}\frac{tP_i(t)}{t_iP_i(t_i)}\,dt,$$

$$R=\frac{2h^{n+2r+2}}{(n-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-1}tP(t)\,Y^{(n)}(a\pm th,\ a,\ a\pm t_1h,\ \ldots,\ a\pm t_rh)\,dt.$$

Наиболее важные для практики случаи формулы (3) мы получим при $\alpha=r$, $\alpha=r-1$, $t_i=i$: $\alpha=r$ дает формулы квадратур замкнутого типа, а $\alpha=r-1$ незамкнутого типа. Полученные формулы имеют приложение к численному интегрированию дифференциальных уравнений [3].

Для того чтобы показать, хотя бы в принципе, как посредством формулы (3) находятся характеристические числа краевых задач, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Y''+[q(x)+\lambda p(x)]\,Y=0 \qquad (p(x)>0). \qquad (4)$$

Пусть ищется интеграл этого уравнения, удовлетворяющий граничным условиям

$$Y(0)=Y(l)=0 \qquad (l>0).$$

Разделим интервал l на k равных частей длины h: $h=\frac{l}{k}$. Пусть $Y(ih)=Y_i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ k)$.

Полагая в формуле (3) $n=2$, $\alpha=r=t_1=1$, получим

$$Y_2=Y_0-2Y_1+\frac{h^2}{12}(Y_0''+10Y_1''+Y_2'')+R, \qquad (5)$$

где

$$R=\frac{h^6}{240}Y^{(6)}(\xi) \qquad (0<\xi<2h).$$

Откидывая в (5) остаточный член и заменяя значения Y_i'' из (4), мы получим уравнение, которое должно быть выполнено для точек $x=ih$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1)$. Написав такое уравнение для каждой из точек деления, мы получим систему $k-1$ линейных однородных алгебраических уравнений с $k-1$ неизвестными значениями $Y(x)$. Эта система будет иметь решение, отличное от нулевого тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, что и даст нам уравнение для определения λ. Вычисляя корни определителя, находим нужные нам числа λ.

Пусть, например, ищутся характеристические числа дифференциального уравнения

$$Y''+\lambda^2 Y=0$$

с предельными условиями $Y(0)=Y(l)=0$. Разделив l на три равные части, находим, что наименьшее значение λ^2 есть $\frac{9,82}{l^2}$. Ошибка около 0,5%.

Из работ, посвященных вопросу вычисления характеристических чисел, отметим работы Коллатца ([4]). Замену уравнения (4) конечно-разностным Коллатц осуществляет при помощи некоторых формул ([5]). Чтобы их получить, достаточно сперва продифференцировать (1) по переменной t, а затем в полученном выражении заменить t через нуль, а t_i через i. Этот способ вывода значительно упрощает остаточные члены.

Окончательные результаты могут быть записаны в следующем виде:

$$hY'(a) = (r!)^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{i+1}}{i\,(r-i)!\,(r+i)!} \{Y(a+ih) - Y(a-ih)\} +$$

$$+ (-1)^r (r!)^2 h^{2r+1} \frac{Y^{(2r+1)}(\xi)}{(2r+1)!} \quad (a - rh < \xi < a + rh),$$

$$h^2 Y''(a) = -2Y(a) \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} + 2(r!)^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2 (r-i)!\,(r+i)!} \{Y(a+ih) +$$

$$+ Y(a-ih)\} + (-1)^r\, 2\,(r!)^2 h^{2r+2} \frac{Y^{(2r+2)}(\xi)}{(2r+2)!} \quad (a - rh < \xi < a + rh).$$

С помощью последней формулы при $r = 2$ получим уравнение

$$Y_4 = 16Y_3 - 30Y_2 + 16Y_1 - Y_0 - 12h^2 Y_2'' - \frac{h^6}{15} Y^{(6)}(\xi), \tag{6}$$

которое, если отбросить в нем остаточный член, а затем заменить Y_2'' из (4), переходит в конечно-разностное уравнение, уступающее по точности конечно-разностному уравнению, полученному с помощью (5).

Математический институт Грузинского филиала
Академии Наук СССР

Поступило
8 VI 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, Изв. Акад. Наук СССР, № 8 (1934). [2] Ш. Е. Микеладзе, Изв. Акад. Наук СССР, № 2 (1935). [3] Ш. Е. Микеладзе, Тр. Тбил. матем. ин-та, VII (1940). [4] L. Collatz, ZS. für angew. Math. und Mech., Bd. 19, Heft 4, S. 224—249 (1939) und Bd. 19, Heft 5, S. 297—318 (1939). [5] L. Collatz, Schriften d. Math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 3, Heft 1, S. 1—34 (1935).