Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

СРЕДНЕ-СТЕПЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ПРИНЦИПУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 V 1940)

Чтобы иметь в виду что-нибудь конкретное, допустим, что речь идет о приближенном представлении функции $f(x)$ действительного переменного x на сегменте $[a, b]$ с помощью полинома $p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ степени $\leqslant n$ с неопределенными коэффициентами a_i, подлежащими определению под условием минимизации интеграла

$$\delta_{2k}(a_0, a_1, \ldots, a_n)=\int_a^b [p_n(x)-f(x)]^{2k}\, dx, \tag{1}$$

где $k>1$ обозначает натуральное число.

При этом достаточно будет предположить функцию $f(x)$ принадлежащею к лебеговскому классу $\mathfrak{L}^{2k}$. Существование и единственность самого решения рассматриваемой задачи устанавливаются, например, с помощью легкой модификации рассуждений, примененных для аналогичной цели D. Jackson'ом [1]. Обозначая через $p_{n0}(x)=\sum_{i=0}^{n} a_{i0} x^{n-i}$ полином, дающий искомое решение, пусть будет $\delta_{2k}(a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{n0})=\delta_{2k,0}$ *. При этом система значений $a_0=a_{00}, \ldots, a_n=a_{n0}$ является единственным действительным решением системы уравнений $\frac{\partial}{\partial a_i}\delta_{2k}(a_0, a_1, \ldots, a_n)=0$, $i=0, 1, \ldots, n$, как показывает, например, рассуждение, принадлежащее G. Pólya [2].

Пусть будет теперь $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i}$ какой-нибудь полином степени $\leqslant n$ (с действительными коэффициентами). Пусть будет $Q_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i x^{n-i}$ соответствующий ему полином квадратического приближения, коэффициенты которого, удовлетворяющие условию

$$\int_a^b (P_n-f)^{2k-2}(Q_n-f)^2\, dx=\text{fonct}(l_0, l_1, \ldots, l_n)=\min, \tag{2}$$

* Мы будем предполагать, вообще, $\delta_{2k,0}\neq 0$.

для своего фактического определения требуют, конечно, лишь решения системы линейных алгебраических уравнений. Этот полином $Q_n(x)$ может быть, разумеется, полностью охарактеризован и одним условием

$$\int_a^b (P_n - f)^{2k-2} (Q_n - f)\, p_n\, dx = 0, \tag{3}$$

если под p_n разуметь полином степени n с произвольными коэффициентами. Легко видеть, что полином $Q_n(x)$ совпадает с $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x) \equiv p_{n0}(x)$. Если этого нет, то наверное

$$\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n) > \delta_{2k,0}.$$

Теорема I. *Всякий раз, когда $Q_n \neq P_n$, можно несколько понизить величину $\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, скорректировав полином $P_n(x)$ с помощью аддитивной поправки вида $\alpha[Q_n(x) - P_n(x)]$ при достаточно малом положительном значении α.*

Доказательство. Полагая

$$\int_a^b [P_n + \alpha(Q_n - P_n) - f]^{2k}\, dx = F(\alpha), \tag{4}$$

имеем

$$F'(0) = 2k \int_a^b (P_n - f)^{2k-2} [(P_n - Q_n) + (Q_n - f)] (Q_n - P_n)\, dx =$$

$$= -2k \int_a^b (P_n - f)^{2k-2} (Q_n - P_n)^2\, dx < 0, \tag{5}$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Получаемое таким образом снижение величины $\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, измеряемое разностью $F(0) - F(\alpha)$, разумеется, бесконечно мало при бесконечно малом α. Далее однако обнаруживается, что *ряд подобных последовательных поправок, если брать α каждый раз «не слишком малым», может быть таким образом составлен, что последовательность полиномов*

$$P_n,\ P_n + \alpha(Q_n - P_n) = P_{n1},\quad P_{n1} + \alpha_1(Q_{n1} - P_{n1}) = P_{n2},$$
$$P_{n2} + \alpha_2(Q_{n2} - P_{n2}) = P_{n3},\ \ldots \tag{6}$$

будет равномерно сходиться к искомому решению $p_{n0}(x)$ задачи апроксимации по принципу наименьших $\overline{2k}$-ых степеней.

При проведении этого исследования приходится прежде всего неоднократно пользоваться одним общим свойством полиномов, которое здесь наиболее точно может быть охарактеризовано предложением:

Вспомогательная теорема о полиномах. Если полином $p_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет условию $|p_n(x)| \leqslant g$ на каком-нибудь подмножестве $E \subset [a, b]$ меры $\theta(b-a)$ $(0 < \theta < 1)$, то $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |p_n(x)| \leqslant$ $\leqslant g T_n\left(\frac{2}{\theta} - 1\right)$, где $T_n(z) \equiv \cos n \arccos z$.

Это предложение и его доказательство были даны в ([3]).

Далее последовательно устанавливаются нижеследующие леммы, детали доказательства которых мы здесь опустим, чтобы не увеличивать объема заметки. Под $\|p_n\|$ будем разуметь в дальнейшем величину $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |p_n(x)|$. Под Q_n следует всюду разуметь полином квадратического приближения, определяемый по данному полиному P_n, как было разъяснено выше. $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i}$ в нижеследующих леммах обозначает, вообще, полином, коэффициенты которого не являются фиксированными, а могут некоторым образом изменяться, как это имеет место, например, при последовательном корректировании коэффициентов в том или ином процессе последовательных приближений. Напротив, n, k, $f(x)$, $[a, b]$ предполагаются фиксированными.

Лемма I. Если $\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ имеет своим пределом $\delta_{2k,0}$, то $P_n(x)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к искомому решению $p_{n0}(x)$ рассматриваемой задачи средне-степенного приближения.

Лемма II. Если величина $\| Q_n - P_n \|$ остается ограниченною, то и величина $\| P_n \|$ остается ограниченною.

Лемма III. Если $\| P_n - p_{n0} \|$ остается больше некоторого фиксированного положительного числа, то и $\| Q_n - P_n \|$ остается больше некоторого (другого) фиксированного положительного числа.

Лемма IV. Если существуют два фиксированных положительных числа A и h таких, что постоянно выполняются оба неравенства

$$\int_a^b (P_n - f)^{2k}\, dx \leqslant A, \tag{7}$$

$$\int_a^b (P_n - f)^{2k}\, dx \geqslant \delta_{2k,0} + h, \tag{8}$$

то им можно противопоставить такое фиксированное положительное число ρ, что имеет место одновременно неравенство

$$\int_a^b (P_n - f)^{2k-2} (Q_n - P_n)^2\, dx \geqslant \rho. \tag{9}$$

Примечание. При условиях последней леммы не трудно также установить ограниченность $\| Q_n - P_n \|$.

Предположим теперь, что осуществляется процесс последовательного приближения, состоящий в последовательном прибавлении к уже полученному $P_n(x)$ поправки вида $\alpha (Q_n - P_n)$, понижающей каждый раз величину $\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. При этом, очевидно, наверное сохраняет силу неравенство вида (7) с фиксированным A.

Теорема II. *Пока наряду с* (7) *выполняется и неравенство* (8) *при каком-нибудь фиксированном* $h > 0$, *величина* α *может быть так выбираема каждый раз, чтобы снижение величины* $\delta_{2k}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ *каждый раз оставалось выше фиксированного* (*вместе с данным* h) *положительного числа.* Этим, очевидно, полностью обеспечивается сходимость процесса.

Доказательство. Рассмотрим опять выражение

$$F(\alpha) = \int_a^b [P_n + \alpha (Q_n - P_n) - f]^{2k}\, dx = \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} J_\nu \alpha^\nu, \tag{10}$$

где $J_\nu = \int_a^b (P_n - f)^{2k-\nu} (Q_n - P_n)^\nu\, dx$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2k$, причем $J_1 = -J_2$ (ср. доказательство теоремы 1). Таким образом

$$\Delta F = F(\alpha) - F(0) = -\binom{2k}{1} J_2 \alpha + \binom{2k}{2} J_2 \alpha^2 + \binom{2k}{3} J_3 \alpha^3 + \ldots + J_{2k} \alpha^{2k}. \tag{11}$$

Пока наряду с (7) выполняется и (8), имеем, с одной стороны, $J_2 \geqslant \rho = \mathrm{const}$ вместе с h (лемма IV); с другой стороны, учитывая также примечание к лемме IV и пользуясь неравенством Hölder'а, убеждаемся в существовании фиксированного числа B такого, что $|J_3|$, $|J_4|$, ..., $|J_{2k}| \leqslant B$. Таким образом, предполагая $0 < \alpha < 1$, будем иметь

$$-\Delta F > \alpha k J_2 [2-(2k-1)\alpha] - \binom{2k}{k} B \frac{\alpha^3 - \alpha^{2k+1}}{1-\alpha} >$$
$$> \alpha k J_2 [2-(2k-1)\alpha] - \binom{2k}{k} \frac{B\alpha^3}{1-\alpha}. \qquad (12)$$

Выбрав какие-нибудь две правильные положительные дроби θ_1, θ_2 под условием $\theta_1 + \theta_2 < 1$, и считая их также фиксированными вместе с h, возьмем

$$\alpha = \bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{2\theta_1}{2k-1}, \sqrt{\frac{2k\rho\theta_2}{3B\binom{2k}{k}}} \right\}. \qquad (13)$$

Учитывая, что $2k \geqslant 4$, откуда $1-\bar{\alpha} > 1 - \frac{2}{2k-1} \geqslant \frac{1}{3}$, будем иметь

$$-\Delta F = |\Delta F| > 2k\rho\bar{\alpha}(1-\theta_1-\theta_2), \qquad (14)$$

что и завершает доказательство, поскольку величины $\bar{\alpha}$, ρ, θ_1, θ_2 все являются фиксированными вместе с h.

Сходимость процесса будет a fortiori обеспечена, если брать каждый раз α близким к тому значению α_0, для которого $F(\alpha)$ достигает своего наименьшего значения. Не входя здесь в детали этого вопроса, заметим лишь, что это значение α_0 является единственным действительным корнем уравнения $F'(\alpha) = 0$, и что при достаточной близости $P_n(x)$ к $p_{n0}(x)$ это значение α_0 будет сколь угодно близко к предельному для него значению $\frac{1}{2k-1}$. Асимптотическая форма поправки $\frac{1}{2k-1}(Q_n - P_n)$ (в рассматриваемом здесь случае апроксимации действительной функции) становится эквивалентною поправке по методу Ньютона к приближенному решению системы уравнений $\frac{\partial}{\partial a_i} \delta_{2k}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Предыдущие рассмотрения, проведенные нами для одного конкретного случая, в действительности допускают обобщение для весьма разнообразных других задач, когда, например, апроксимирующие функции или область апроксимации являются иными, в частности, — к задачам апроксимации в комплексной области.

С точки зрения приложений нужно иметь в виду выясняющиеся в силу этих результатов возможности применения методов фактического построения к задачам о (непрерывных) функциях, наименее уклоняющихся от нуля в смысле Чебышева, в частности, например, к различным вопросам этого рода в комплексной области и в действительной области нескольких измерений, которые служили предметом рассмотрения в ряде работ G. Julia ([4]).

Институт математики
Академии Наук УССР
Киев

Поступило
26 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Jackson, Trans. of the Amer. Math. Soc., 22, pp. 117/28 (1921). [2] G. Pólya, Comptes Rendus, Paris, 157 (1913, 10 XI). [3] Е. Ремез, Сообщ. Харьк. мат. о-ва, XIII, стр. 93—95 (1936). [4] G. Julia, Comptes Rendus, Paris, 182 (1926, 17 V); Bull. des Sc. Math., LI (1927); Journ. de math. pure et appl., VII (1928); Atti del congresso Bologna, III (1928); Ann. de l'École Norm., 44 (1927); ibid., 47 (1929).