Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. ШИН

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ КВАЗИ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1940)

Пусть P, Q, R, Λ—квадратные матрицы соответственно с элементами p_{kj}, q_{kj}, r_{kj}, $\lambda_{kj}=\frac{a_{kj}\lambda+b_{kj}}{c_{kj}\lambda+d_{kj}}$, $k, j=1, 2, \ldots, n$, где p_{kj}, q_{kj}, r_{kj}, a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, d_{kj}—комплекснозначные функции действительного переменного x, определенные в конечном или бесконечном интервале (a, b); λ—комплексный параметр; F, F_k, $k=1, 2, \ldots, n$,—векторы соответственно с компонентами f_j, f_{kj}, $j=1, 2, \ldots, n$; (α, β)—произвольный конечный замкнутый интервал, внутренний к (a, b); $L_2(\alpha, \beta)$—совокупность комплекснозначных и измеримых по Лебегу функций $\varphi(x)$, для которых существует интеграл Лебега $\int\limits_\alpha^\beta |\varphi(x)|^2\,dx$; $D(\Lambda; F, G)$—билинейная форма $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a_{kj}d_{kj}-b_{kj}c_{kj}}{|c_{kj}\lambda+d_{kj}|^2}f_j\overline{g}_k$; $L_2(\Lambda; (a, b))$—совокупность векторов F, для которых существует интеграл Лебега $\int\limits_a^b D(\Lambda;\ F, F)\,dx$.

Условие A: $p_{kj}=0$, если $k\neq j$; $q_{kj}=0$, если $k+j\neq n+1$.

Условие B: элементы матриц P^{-1}, Q^{-1}, R, Λ принадлежат к $L_2(\alpha, \beta)$.

Условие C (условие самосопряженности):

$$\overline{Q'}=P\,(\overline{P'}=Q);\quad \overline{PR^*Q'^{-1}}=R,$$

где $p'_{kj}=p_{k,n+1-j}$; $q'_{kj}=q_{k,n+1-j}$; $r^*_{kj}=r_{jk}$.

Условие D: $\overline{a_{kj}}=0$, если $k+j=n+1$; $\overline{b_{kj}}=0$, если $k+j=n+1$.

Условие E: $\overline{a_{jk}}=a_{kj}$, $\overline{b_{jk}}=b_{kj}$, $\overline{c_{jk}}=c_{kj}$, $\overline{d_{jk}}=d_{kj}$;

$\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a_{kj}d_{kj}-b_{kj}c_{kj}}{|c_{kj}\lambda+d_{kj}|^2}f_j\overline{f}_k$ ... образует положительно определенную квадратичную форму относительно f_k.

Введем квази-дифференциальные выражения

$$F^{[0]}=PF,\ F^{[1]}=iQ\frac{d}{dx}F^{[0]}+RF^{[0]},$$

где результат умножения вектора на матрицу (слева) означает «свернутый» по строкам вектор, например, RF означает вектор с компонентами

$\sum_{j=1}^{n} r_{kj} f_j, \quad k=1, 2, \ldots, n.$

Вектор F назовем решением уравнения $F^{[1]} - \Lambda F = F^*$ (1) в интервале (α, β), если компоненты вектора $F^{[0]}$ абсолютно непрерывны в интервале (α, β) и вектор $F^{[1]} - \Lambda F$ равен данному вектору F^* почти всюду в интервале (α, β).

Если выполнены условия А, В и компоненты вектора F^* принадлежат к $L_2(\alpha, \beta)$, то методом последовательных приближений в малом интервале легко доказать, что уравнение (1) имеет единственное решение в интервале (α, β), принимающее произвольно заданное начальное значение в произвольно выбранной точке из интервала (α, β).

Однородное уравнение $F^{[1]} - \Lambda F = 0, \quad a < x < b,$ (2) имеет n линейно независимых решений в каждом конечном замкнутом интервале (α, β), внутреннем к (a, b). Но не каждое решение уравнения (2) принадлежит к $L_2(\Lambda; (a, b))$, даже к $L_2(\Lambda; (a, c))$ или $L_2(\Lambda; (c, b))$, где $x = c$—конечная точка, внутренняя к (a, b).

Мы утверждаем, что если выполнены условия A, B, C, D, E, то

Число линейно независимых решений уравнения (2), принадлежащих			
к / равно / для	$L_2(\Lambda; (a,c))$	$L_2(\Lambda; (c,b))$	$L_2(\Lambda; (a,b))$
$J(\lambda) > 0$	$n - \left[\frac{n}{2}\right]$ или n	$\left[\frac{n}{2}\right]$ или n	0 или $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ или $\left[\frac{n}{2}\right]$ или n
$J(\lambda) < 0$	$\left[\frac{n}{2}\right]$ или n	$n - \left[\frac{n}{2}\right]$ или n	0 или $\left[\frac{n}{2}\right]$ или $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ или n,

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Случай $n=2$ рассмотрен H. Weyl'ем [1]. Ниже мы приводим схему доказательства.

1° Введем сопряженные квази-дифференциальные операции:

$$G^{\{0\}} = \overline{Q'}G, \quad G^{\{1\}} = i\overline{P'}\frac{d}{dx}G^{\{0\}} + \overline{PR^*Q'^{-1}}G^{\{0\}}.$$

Тогда формула Грина имеет вид:

$$(F^{[1]}, G)\Big|_c^x - (F, G^{\{1\}})\Big|_c^x = i\{[F, G]_x - [F, G]_c\}, \tag{3}$$

где $(F, G)\Big|_c^x = \int_c^x \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi)\overline{g_k(\xi)}\,d\xi; \quad [F, G]_x = \sum_{k=1}^{n} f_k^{[0]}(x)\overline{g_{n+1-k}^{\{0\}}(x)}.$

Если выполнено условие C, то $F^{\{\nu\}} = F^{[\nu]}$, $\nu = 0, 1$.

2° Необходимым и достаточным условием линейной независимости n решений F_k, $k=1, 2, \ldots, n$, уравнения (2) является отличие от нуля детерминанта типа Вронского $W_x = \det f_{kj}^{[0]}(x)$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$. Легко доказывается, что векторы G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, определенные по формуле

$$g_{kj} = \overline{\left(\frac{\partial \ln W_x}{q_{j,n+1-j}\,\partial f_{k,n+1-j}^{[0]}}\right)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

являются решениями сопряженного однородного уравнения

$$G^{\{1\}} - \overline{\Lambda}G = 0. \tag{5}$$

Из условия D следует, что формула Лиувилля имеет вид:

$$W_x = W_c e^{i\int\limits_c^x \sum\limits_{k=1}^n \frac{r_{k,\,n+1-k}}{q_{k,\,n+1-k}}\,d\xi},$$

и из условия C следует, что $|W_x| = \mathrm{const}$.

3° Если векторы F_k, G_k, $k=1, 2, \ldots, n$, связаны соотношением (4) и выполнено условие C, то справедливы следующие равенства

$$\left.\begin{aligned} \det[F_k, F_j]_x \cdot \det\overline{[G_k, G_j]_x} &= 1, \\ \det[F_k, F_j]_x &= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} |W_x|^2, \\ \det[F_{k'}, F_{j'}]_x &= \det\overline{[G_{k''}, G_{j''}]_x} \cdot \det[F_k, F_j]_x, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$k, j = 1, 2, \ldots, n; \quad k', j' = \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n;$$

$$k'', j'' = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right];$$

или

$$k', j' = \nu,\ \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n;$$

$$k'', j'' = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

4° Система решений F_k, $k=1, 2, \ldots, n$, уравнения (2) называется фундаментальной, если она удовлетворяет таким начальным значениям при $x=c$, что $[F_k, F_{n+1-j}]_c = \delta_{kj} = 1$ или 0 в зависимости от того, $k=j$ или $k \neq j$. Фундаментальная система решений G_k, $k=1, 2, \ldots, n$, сопряженного уравнения (5), определенных по формуле (4), удовлетворяет таким начальным условиям, что $[G_k, G_{n+1-j}]_c = \delta_{kj}$. Из формулы (3) следует, что

$$\left.\begin{aligned} [F_k, F_j]_\beta &= 2J(\lambda)\int\limits_c^\beta D(\Lambda; F_k, F_j)\,dx + \delta_{k,\,n+1-j}, \\ [G_k, G_j]_\beta &= -2J(\lambda)\int\limits_c^\beta D(\Lambda; G_k, G_j)\,dx + \delta_{k,\,n+1-j}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) следует, что для фундаментальных систем решений F_k, G_k, $k=1, 2, \ldots, n$ уравнений (2) и (5) имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\det[F_{k'}, F_{j'}]_\beta > 0; \quad k', j' = \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n; \\ &\det[F_{k'', j''}]_\beta < 0; \quad k'', j'' = \nu,\ \left[\frac{n}{2}\right]+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n; \\ &(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\det[G_{k'}, G_{j'}]_\beta > 0; \quad k', j' = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\beta > c$, $\nu \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

5° Составим новые решения Φ_k, $k=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ из фундаментальной системы решений F_k, $k=1, 2, \ldots, n$:

$$\Phi_k = F_k + \sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{kj} F_{n+1-j}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

где l_{kj}—комплексные числа. Выберем эти числа так, чтобы имело место равенство

$$2J(\lambda) \int_c^\beta D(\Delta;\ \Phi_k,\ \Phi_k)\, dx = -[\Phi_k,\ \Phi_k]_c. \tag{9}$$

Это равносильно условию $[\Phi_k,\ \Phi_k]_\beta = 0$ или, в развернутом виде,

$$\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k\nu} \overline{l_{kj}}\, [F_{n+1-\nu},\ F_{n+1-j}]_\beta +$$

$$+ 2R \sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{kj}\, [F_{n+1-j},\ F_k]_\beta + [F_k,\ F_k]_\beta = 0. \tag{9'}$$

Если $R(l_{kj}),\ J(l_{kj}),\ j = 1, 2, \ldots, n - \left[\frac{n}{2}\right]$ рассмотрим как декартовы координаты, то уравнение (9') изображает поверхность второго порядка $\mathfrak{F}_k(\beta)$. Перенося начало координат в центр поверхности $\mathfrak{F}_k(\beta)$, уравнение (9') перепишем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l'_{k\nu} \overline{l'_{kj}}\, [F_{n+1-\nu},\ F_{n+1-j}]_\beta = \rho_k(\beta). \tag{9''}$$

Левая часть этого уравнения равна

$$2J(\lambda) \int_c^\beta D(\Delta;\ \Phi'_k,\ \Phi'_k)\, dx + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) \left| l_{k,\ \left[\frac{n}{2}\right]+1} \right|^2,$$

где

$$\Phi'_k = \sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l'_{kj} F_{n+1-j},$$

и

$$\rho_k(\beta) = -\frac{\det [F_{\nu''},\ F_{j''}]_\beta}{\det [F_{\nu'},\ F_{j'}]_\beta}; \qquad \begin{aligned} \nu'', j'' &= k, \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n; \\ \nu', j' &= \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Если $J(\lambda) > 0,\ \beta > c$, то на основании условия E и неравенства (8) следует, что левая часть уравнения (9'') есть положительно определенная форма относительно l'_{kj}, а правая часть — положительное число. Следовательно, $\mathfrak{F}_k(\beta)$ есть эллипсоид.

6° Так как

$$[\Phi_k,\ \Phi_k]_c = 2R(l_{kk}) + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) \left| l_{k,\ \left[\frac{n}{2}\right]+1} \right|^2,$$

то для точек $\{l_{kj}\}$, лежащих внутри и вне поверхности $\mathfrak{F}_k(\beta)$, соответственно имеют место неравенства:

$$2J(\lambda)\int\limits_c^\beta D(\Lambda;\ \Phi_k, \Phi_k)\,dx < -[\Phi_k, \Phi_k]_c,$$

$$2J(\lambda)\int\limits_c^\beta D(\Lambda;\ \Phi_k, \Phi_k)\,dx > -[\Phi_k, \Phi_k]_c.$$

Если β возрастает, то $\mathfrak{F}_k(\beta)$ сжимается и при $\beta \to b$ $\mathfrak{F}_k(\beta)$ стремится к некоторому предельному положению $\mathfrak{F}_k(b)$. Для точек $\{l_{kj}\}$, лежащих на или внутри $\mathfrak{F}_k(b)$, имеет место неравенство

$$2J(\lambda)\int\limits_c^b D(\Lambda;\ \Phi_k, \Phi_k)\,dx \leqslant -[\Phi_k, \Phi_k]_c.$$

Следовательно, векторы Φ_k, $k=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, принадлежат к $L_2(\Lambda;\ (c, b))$.

7° Число линейно независимых решений уравнения (2), принадлежащих к $L_2(\Lambda;\ (c, b))$ зависит от вида предельной поверхности $\mathfrak{F}_k(b)$. Доказывается, что $\mathfrak{F}_k(b)$ есть или точка или $2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$-мерный эллипсоид. В первом случае только $\left[\frac{n}{2}\right]$ решений Φ_k, $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, или их линейные комбинации принадлежат к $L_2(\Lambda;\ (c, b))$, а во втором случае все n линейно независимых решений уравнения (2) принадлежат к $L_2(\Lambda;\ (c, b))$. Подробное доказательство аналогичного положения приведено автором ранее ([2]).

8°. Аналогичным образом доказывается, что в случае $J(\lambda) > 0$ число линейно независимых решений уравнения (2), принадлежащих к $L_2(\Lambda;$ $(a, c))$ равно $n-\left[\frac{n}{2}\right]$ или n. Далее, обозначая через N_a, N_b, N числа линейных независимых решений уравнения (2), $J(\lambda) > 0$, принадлежащих соответственно к $L_2(\Lambda;\ (a, c))$, $L_2(\Lambda;\ (c, b))$, $L_2(\Lambda;\ (a, b))$, доказывается, что если $N_a = n-\left[\frac{n}{2}\right]$, $N_b = \left[\frac{n}{2}\right]$, то $N=0$; если $N_a = n-\left[\frac{n}{2}\right]$, $N_b = n$, то $N = n-\left[\frac{n}{2}\right]$; если $N_a = n$, $N_b = \left[\frac{n}{2}\right]$, то $N = \left[\frac{n}{2}\right]$; если $N_a = n$, $N_b = n$, то $N = n$; при этом $N=0$ означает, что уравнение (2) не имеет ни одного решения, принадлежащего к $L_2(\Lambda;\ (a, b))$, кроме $F \equiv 0$. Случай $J(\lambda) < 0$ рассматривается совершенно аналогичным образом.

Дагестанский педагогический институт
Махач-Кала

Поступило
14 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Hermann Weyl, Ann. of Math., 36, 230—254 (1935). [2] Д. Шин, Матем. сб., 7 (1940).