Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. Н. ХЛОДОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 V 1940)

В настоящей работе рассматривается вопрос об определении абсолютно монотонной функции двух действительных переменных, заданной в области ($x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$) при помощи ее значений на полупрямых, параллельных одной из осей координат, или ее числовых значений в вершинах прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Изложение начинается с формулировки некоторых общих свойств абсолютно монотонных функций, необходимых для решения намеченных интерполяционных задач.

1. Теорема С. Н. Бернштейна [1]. *Если в сегменте* ($a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$) *все конечные разности* $f(x, y)$ *до k-го порядка (включительно) не отрицательны, тогда* $f(x, y)$ *имеет непрерывные частные производные до k—2-го порядка и существуют следующие правые и левые частные производные*

$$\frac{\partial^+}{\partial x}\left[\frac{\partial^{k-2} f}{\partial x^r \partial y^p}\right]; \quad \frac{\partial^-}{\partial x}\left[\frac{\partial^{k-2} f}{\partial x^r \partial y^p}\right]; \quad \frac{\partial^+}{\partial y}\left[\frac{\partial^{k-2} f}{\partial x^r \partial y^p}\right]; \quad \frac{\partial^-}{\partial y}\left[\frac{\partial^{k-2} f}{\partial x^r \partial y^p}\right],$$

где $r+p=k-2$ ($a<x<b$, $\alpha<y<\beta$).

Акад. С. Н. Бернштейном [1] эта теорема доказана для функций одного переменного, в случае двух или многих переменных метод акад. С. Н. Бернштейна также может быть применен.

Теорема 2. *Абсолютно монотонная функция* $F(x, y)$* *единственным образом может быть представлена в виде следующего интеграла*

$$F(x, y)=\int_0^1\int_0^1 t^{-x}u^{-y}\,\underset{t\ u}{d\,d}\,\omega(t, u) \qquad (x \leqslant 0,\ y \leqslant 0), \tag{1}$$

где $\omega(t, u)$*—неубывающая функция, определенная в единичном квадрате и нормированная условиями*

$$\omega(0, y)=\omega(x, 0)=0; \quad \omega(x, y)=\omega(x+0,\ y+0). \tag{2}$$

Функцию $\omega(x, y)$ называют неубывающей, если $\underset{x\ y}{\Delta\Delta}\,\omega(x, y) \geqslant 0$. Эту теорему можно доказать, воспользовавшись теоремой Hausdorff'a [2]

---

* Здесь и во всем дальнейшем изложении рассматриваются только абсолютно монотонные функции, определенные в области $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ и принимающие конечное значение в точке (0,0).

из теории моментов, обобщенной на теорию моментов двух переменных Hildebrand'ом и Schoenberg'ом ([3]), если заметить, что бесконечная матрица

$$\| F(\alpha k, \beta p) \|, \qquad k, p = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

значений абсолютно монотонной функции будет матрицей моментов неубывающей в единичном квадрате функции $\omega_{\alpha,\beta}(x, y)$.

2. Теорема 3. *1° Если $F(x, y)$ абсолютно монотонная функция, тогда все детерминанты* Hankel'я

$$\left| F(\alpha \overline{k+p} + \beta, y) \right|_{k=0}^{n}, \qquad \alpha < 0, \ \beta \leqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots,$$

неотрицательны;

2° если при $y = y_0$

$$\left| F(\alpha k, y_0) \right|_{k=0}^{n} = 0,$$

тогда

$$\left| F(\alpha \overline{k+p} + \beta, y) \right|_{k=0}^{n+r} \equiv 0, \ y \leqslant 0, \ r \geqslant 0;$$

3° если первым обратится в нуль детерминант

$$\left| F(\alpha k, y) \right|_{0}^{n} = 0,$$

тогда

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y) \lambda_j^{-x}, \quad x \leqslant 0, \ y \leqslant 0;$$

4° если первым обратится в нуль детерминант

$$\left| F(\alpha \overline{k+1}, y) \right|_{0}^{n} = 0,$$

тогда

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y) \lambda_j^{-x}, \qquad x < 0, \ y \leqslant 0,$$

и

$$F(0, y) = \varphi_0(y) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y),$$

где $\varphi_j(y)$ абсолютно монотонны и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \leqslant 1$.

Пункт 1° очевиден, пункты 2°—3° вытекают из того, что при соблюдении условий неубывающая функция $\omega(x, y)$ формулы (1) при фиксированном значении y постоянна за исключением точек разрыва $x = \lambda_j$, а при выполнении условий 4° добавляется еще новая точка разрыва $x = 0$. Заметим, что имеет место аналогичная теорема для детерминантов Hankel'я следующего вида:

$$\left| F(x, \alpha \overline{k+p} + \beta) \right|_{k=0}^{n}$$

3. Из теоремы 3 вытекают следствия:

Следствие 1. *Если абсолютно монотонная функция $F(x, y)$ на замкнутой полупрямой $x \leqslant 0$, $y = y_0$ равна экспоненциальному полиному, т. е.*

$$F(x, y_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^{-x}, \quad \alpha_j > 0, \quad 0 < \lambda_j \leqslant 1,$$

тогда

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y) \lambda_j^{-x}, \quad \varphi_j(y_0) = \alpha_j.$$

Следствие 2. *Для того чтобы абсолютно монотонная функция в замкнутой области $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ была экспоненциальным полиномом вида*

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i^{-x} \mu_j^{-y}, \ \alpha_{ij} > 0, \ 0 < \frac{\lambda_i}{\mu_j} \leqslant 1$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\left| F(k\alpha, y) \right|_{k=0}^{q} > 0, \ \left| F(x, \beta k) \right|_{k=0}^{p>0} \quad \begin{matrix} q \leqslant n-1, \ \alpha < 0 \\ p \leqslant m-1, \ \beta < 0 \end{matrix}$$

$$\left| F(-k, 0) \right|_{k=0}^{n} = 0, \ \left| F(0, -k) \right|_{k=0}^{m} = 0.$$

Аналогичные предложения можно сформулировать и доказать для функции $F(x, y)$ непрерывной, в полузамкнутой области ($x \leqslant 0$, $y < 0$) или ($x < 0$, $y \leqslant 0$), а также и непрерывной только в незамкнутой области ($x < 0$, $y < 0$).

В указанных случаях $F(x, y)$ будет разрывна на одной из прямых $x = 0$ или $y = 0$ или разрывна на обеих из этих прямых.

4. При помощи последовательности функций

$$f_0(y), \ f_1(y), \ldots, f_n(y), \ldots \tag{3}$$

в поле полиномов $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ определим дистрибутивный оператор M следующим образом

$$M\{P, f\} = a_0 f_0(y) + a_1 f_1(y) + \ldots + a_n f_n(y).$$

Последовательность (3) назовем абсолютно неотрицательной последовательностью, если из условия $P(z) \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ следует

$$M\{P, f\} \geqslant 0, \ \underset{y}{\Delta^k} M\{P, f\} = M\{P, \underset{y}{\Delta^k} f\} \geqslant 0, \quad y \leqslant 0,$$

для всех целых k.

Теорема 4. *Для того чтобы существовала абсолютно монотонная функция $F(x, y)$, удовлетворяющая условиям*

$$F(-k, y) = f_k(y), \quad k = 0, 1, \ldots, \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{f_k(y)\}$ была абсолютно неотрицательна.

Теорема доказывается с помощью полиномов акад. С. Н. Бернштейна несколько видоизмененным методом Hausdorff'а ([2]). Заметим, что благодаря использованию полиномов С. Н. Бернштейна удается дать эффективный метод построения $F(x, y)$, не ограничиваясь только доказательством существования.

5. С помощью бесконечной матрицы (таблицы с двойным входом) действительных чисел

$$\| C_{k,p} \|, \quad k, p = 0, 1, 2, \ldots,$$

определим в поле полиномов двух переменных дистрибутивный функционал M^* следующим образом:

$$M^* \{x^k \cdot y^p\} = C_{k,p}.$$

Матрицу назовем неотрицательной, если функционал от неотрицательного в единичном квадрате полинома $P\ (x,\ y)$ будет больше или равен нулю.

Теорема 5. *Дана конечная последовательность функций*

$$f_0(y),\ f_1(y), \ldots, f_n(y),$$

определенных при $y \leqslant 0$. *Для того чтобы существовала абсолютно монотонная функция* $F(x, y)$ *такая, что*

$$F(-k, y) = f_k(y), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\| f_k(\alpha p) \| \qquad \begin{matrix} k=0,\ 1, \ldots,\ n \\ p=0,\ 1, \ldots, \infty \end{matrix}\ \alpha < 0$$

была неотрицательной.

Теорема 6. *Для того чтобы существовала абсолютно монотонная функция такая, что*

$$F(-k, -p) = C_{k,p} \qquad \begin{matrix} k=0,\ 1, \ldots,\ n \\ p=0,\ 1, \ldots,\ m \end{matrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\| C_{k,p} \| \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p \leqslant m \end{matrix}$$

была неотрицательной.

Доказательство теорем 5 и 6 существенно опирается на следующую лемму из теории моментов.

Лемма 1. *Для того чтобы матрицу*

$$\| C_{k,p} \| \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p \leqslant m \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p < \infty \end{matrix}$$

можно было дополнить до полной матрицы моментов неубывающей в единичном квадрате функции, необходимо и достаточно, чтобы данная матрица была неотрицательной.

Для доказательства леммы достаточно обобщить на многие переменные метод F. Riesz'a ([4]).

6. Условия теорем 5 и 6, вообще говоря, не определяют однозначно абсолютно монотонную функцию. С помощью указанных теорем и теоремы 3 можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Для того чтобы матрица*

$$\| C_{k,p} \| \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p < \infty \end{matrix}$$

однозначно определяла абсолютно монотонную функцию, удовлетворяющую условиям

$$F(-k, -p) = C_{k,p} \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p < \infty \end{matrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была неотрицательной и чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1° $$\left| C_{k0} \right|_{k=0}^{\nu} = 0 \quad \left| C_{k0} \right|_{k=0}^{\nu-1} > 0, \quad \nu \leqslant n,$$

или

2° $$\left| C_{k0} \right|_{k=0}^{\nu} > 0 \quad \left| C_{k+1,0} \right|_{k=0}^{\nu} = 0, \quad \nu \leqslant n-1.$$

Теорема 8. *Для того чтобы конечная матрица*

$$\| C_{k,p} \| \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant p \leqslant m \end{matrix}$$

однозначно определяла абсолютно монотонную функцию, удовлетворяющую условиям

$$F(-k,-p)=C_{k,p}\qquad \begin{matrix} 0\leqslant k\leqslant n \\ 0\leqslant p\leqslant m \end{matrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица была неотрицательной и чтобы выполнялось одно из следующих четырех условий

$$1^{\circ}\ \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu}=0\quad \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu-1}>0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu}=0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu-1}>0\quad \begin{matrix}\nu\leqslant n\\ \mu\leqslant m\end{matrix}$$

или

$$2^{\circ}\ \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu}>0\quad \left|C_{k+1,0}\right|_0^{\nu}=0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu}=0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu-1}>0\quad \begin{matrix}\nu\leqslant n-1\\ \mu\leqslant m\end{matrix}$$

или

$$3^{\circ}\ \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu}=0\quad \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu-1}>0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu}>0\quad \left|C_{0,p+1}\right|_0^{\mu}=0\quad \begin{matrix}\nu\leqslant n\\ \mu< m-1\end{matrix}$$

или

$$4^{\circ}\ \left|C_{k,0}\right|_0^{\nu}>0\quad \left|C_{k+1,0}\right|_0^{\nu}=0\quad \left|C_{0,p}\right|_0^{\mu}>0\quad \left|C_{0,p+1}\right|_0^{\mu}=0\quad \begin{matrix}\nu\leqslant n-1\\ \mu\leqslant m-1\end{matrix}$$

Институт им. Д. И. Менделеева

Поступило
26 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Leç. sur les propr. extrém. [2] F. Hansdorff, Math. ZS., 16, p. 220 (1923). [3] T. Hildebrand a. J. Schoenberg, Ann. of Mat., 34, p. 317 (1933). [4] F. Riesz, Arkiv för mat. ect., 17, № 16, p. 1—52 (1923).