Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Л. ГРАНОВСКИЙ

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 2 V 1940)

1. В предыдущем сообщении ([8]), далее обозначаемом I, была установлена система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая динамические состояния плазмы в диффузионном режиме. Общее решение их вряд ли возможно; однако, можно сделать ряд существенных выводов, рассмотрев случай малых возмущений * разряда.

2. Положим, что на постоянную эдс цепи наложено малое возмущение и можно написать:

$$E = E_c\,(1+\varepsilon), \tag{II, 1}$$

где $\varepsilon \ll 1$. Тогда продольный градиент потенциала X, электронная температура U_e, концентрация электронов по оси n_0, число актов ионизации на 1 электрон в 1 секунду z и сила тока I будут также испытывать малые возмущения; можно написать: $X = X_c\,(1+\chi)$; $U_e = U_{ec}\,(1+\upsilon)$; $n_0 = n_{0c}\,(1+\nu)$; $z = z_c\,(1+\zeta)$; $I = I_c\,(1+i)$.

Вставив эти значения в уравнения (1″), (2), (3), (4′) и (6) сообщения I, в которых пренебрежем U_g сравнительно с U_{ec} и будем считать $K = \mathrm{const}$, $g = \mathrm{const}$ и $h = \mathrm{const}$; замечая, что $\frac{\mu^2 b_1}{a^2 p} U_{ec} = z_c$, $\frac{2g}{3\varepsilon} \cdot \frac{X_c^2}{p\sqrt{U_{ec}}} = hpU_{ec}^{\frac{3}{2}}$ и $\zeta = \frac{U_i}{U_{ec}}\upsilon$ и ограничиваясь членами 1-го порядка малости, найдем систему линейных уравнений:

$$\frac{d\nu}{dt} = z_c\left(\frac{U_i}{U_{ec}} - 1\right)\upsilon, \tag{II, 2}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 2hp\sqrt{U_{ec}}\,(\chi - \upsilon), \tag{II, 3}$$

$$i = \nu + \chi - \frac{1}{2}\upsilon, \tag{II, 4}$$

$$\chi = \frac{E_c}{E_c - K}\,\varepsilon - \frac{RI}{E_c - K}\,\nu + \frac{RI_c}{2\,(E_c - K)}\,\upsilon. \tag{II, 5}$$

Три уравнения (II, 2—4) между 4 неизвестными ν, υ, χ и i содержат только величины, характеризующие самый разряд; в них не входят ε

* Этот метод исследования динамических систем в теории разряда был использован совершенно недостаточно, главным образом, для решения вопроса об устойчивости разряда, см. работы Кауфмана ([1]), Делленбаха ([2,3]), Фридлендера([4]), обзор в книге Зеелигера ([5]) и статью Бера в Handbuch der Physik ([6]).

и постоянные внешней цепи. Отсюда вытекает важное положение: соотношения между переменными составляющими параметров разряда при малых колебаниях не зависят от внешней цепи. Следовательно, достаточно найти уравнение, включающее величины внешней цепи для какого-нибудь одного из этих параметров, например ν. Находим, исключая остальные неизвестные:

$$\nu'' + 2\gamma\nu' + \omega_0^2\nu = \omega_0^2 \frac{E_c}{RI_c}\varepsilon, \tag{II, 6}$$

где для краткости обозначено:

$$\gamma = hp\sqrt{U_{ec}}\left[1 - \frac{RI_c}{2(E_c - K)}\right], \tag{II, 7}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2hp\sqrt{U_{ec}}\, z_c\left(\frac{U_i}{U_{ec}} - 1\right)RI_c}{E_c - K}. \tag{II, 8}$$

Для υ получим аналогичное уравнение, но с иной правой частью. При всех условиях $\gamma > 0$ и $\omega_0^2 > 0$; это значит, что состояния равновесия устойчивы; самовозбуждение колебаний невозможно.

3. Процессы установления. Пусть $\varepsilon = 0$ (эдс постоянна) и при $t = 0$ $\nu = \nu_0$, т. е. концентрация ионов отличается от равновесной для данной эдс E_c на величину $n_c\nu$. Произойдет спадание концентрации ионов до равновесного значения (частичная деионизация). Уравнение этого процесса найдем, полагая в (II, 6) $\varepsilon = 0$:

$$\nu(t) = A_1 e^{q_1 t} + A_2 e^{q_2 t},$$

где

$$q_{1,2} = -hp\sqrt{U_{ec}}\left(1 - \frac{RI_c}{2E_1}\right)\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{hp\sqrt{U_{ec}}\cdot\left(1 - \frac{RI_c}{2E_1}\right)^2}\cdot\frac{RI_c}{E_1}}\,\right] \tag{II, 9}$$

$$\Delta = z_c\left(\frac{U_i}{U_{ec}} - 1\right),\quad E_1 = E_c - K.$$

Значения A_1 и A_2 зависят обычным образом от начальных условий; если при $t = 0$ $\nu = \nu_0$ и $\frac{d\nu}{dt} = 0$, то $A_1 = \frac{q_2}{q_2 - q_1}\nu_0$ и $A_2 = \frac{q_1}{q_1 - q_2}\nu_0$.

С увеличением давления γ растет гораздо быстрее ω_0, так как z_c при этом быстро падает. Существует такое $p = p_{крит}$, при котором $\gamma^2 = \omega_0^2$ или

$$\frac{hp\sqrt{U_{ec}}}{\Delta} = \frac{2\frac{RI_c}{E_1}}{\left(1 - \frac{RI_c}{2E_1}\right)^2}. \tag{II, 10}$$

Это давление зависит от рода газа, диаметра трубки и состава цепи. При всяком $p > p_{крит}$ процесс установления происходит апериодически (q_1 и q_2 действительны). Если $p \gg p_{крит}$, $\gamma^2 \gg \omega_0^2$, то приближенно имеем:

$$q_1 = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \frac{\Delta}{\frac{E_1}{RI_c} - \frac{1}{2}},\quad q_2 = -2\gamma,\quad q_1 \ll q_2.$$

При указанных выше начальных условиях $A_2 \ll A_1$ и практически $\nu(t) = \nu_0 e^{-q_1 t}$. Процесс установления происходит экспоненциально; «временная постоянная» частичной деионизации

$$\tau_\nu = \frac{1}{q_1} = \frac{\frac{E_1}{RI_c} - \frac{1}{2}}{\Delta} = \left(\frac{E_1}{RI_c} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\mu^2 D_a\left(\frac{U_i}{U_{ec}} - 1\right)} \tag{II, 11}$$

пропорциональна временной постоянной полной деионизации $\tau_0 = \frac{a^2}{\mu^2 D_a}$, но численно значительно меньше ее. Различие в этих временных постоянных характерно для нелинейных систем.

При $p < p_{крит}$ q_1 и q_2 становятся комплексными. Процессы установления должны принять характер затухающих колебаний с коэффициентом затухания γ.

4. Вынужденные колебания (модулированный разряд). Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$. Тогда n, I, χ и υ также будут совершать малые колебания той же частоты. Для ν находим в случае установившихся колебаний:

$$\nu = \frac{\omega_0^2 \frac{E_c}{RI_c} \varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} e^{j(\omega t + \varphi_\nu)}, \tag{II, 12}$$

причем

$$\operatorname{tg} \varphi_\nu = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{2\omega hp\sqrt{U_{ec}}\left(1 - \frac{I_c R}{2E_1}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{II, 13}$$

Для частот порядка 10^3 Hz и ниже $\omega_0^2 \gg \omega^2$ и $\omega_0^4 \gg \omega^2\gamma^2$. Тогда $\nu \approx \frac{E_c}{RI_c}\varepsilon_0 e^{j(\omega t + \varphi_\nu)}$ и $\operatorname{tg}\varphi_\nu \approx -\frac{\omega}{\Delta}\left(\frac{E_1}{RI_c} - \frac{1}{2}\right)$. Мы видим, что колебания концентрации ионов несколько больше, чем колебания эдс, но остаются величиной того же порядка. Колебания электронной температуры υ мы найдем из (II, 3):

$$\upsilon = \frac{\omega\omega_0^2 \frac{E_c}{RI_c}\varepsilon_0}{\Delta\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} e^{j\left(\omega t + \varphi_\nu + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{II, 14}$$

При низких частотах (II, 14) переходит в $\upsilon \approx \frac{\omega}{\Delta} \cdot \frac{E_c}{RI_c}\varepsilon_0 e^{j\left(\omega t + \varphi_\nu + \frac{\pi}{2}\right)}$.

В этих условиях колебания U_e значительно меньше, чем колебания эдс и n, причем они растут пропорционально частоте. По фазе υ опережает ν на 90°. Эти результаты конкретизируют общие соображения о роли электронной температуры в динамическом режиме, которые были даны в I.

Колебания напряженности поля χ можно найти из (II, 3) и (II, 14):

$$\chi = \frac{1}{2hp\sqrt{U_{ec}}}\dot{\upsilon} + \upsilon = \frac{\omega\omega_0^2\left(\frac{E_c}{RI_c}\right)\varepsilon_0\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4h^2p^2U_{ec}}}}{\Delta\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} e^{j\left(\omega t + \varphi_\nu + \frac{\pi}{2} + \alpha_\chi\right)}, \tag{II, 15}$$

причем

$$\operatorname{tg}\alpha_\chi = \frac{\omega}{2hp\sqrt{U_{ec}}}.$$

При низких и средних частотах χ_0 незначительно превышает υ_0 (практически $\chi_0 = \upsilon_0$) и также мало опережает последнее по фазе (α_χ очень мало).

Конечная теплоемкость электронного газа сказывается только при высоких частотах. По сравнению с колебаниями эдс—продольное поле, а, следовательно, и напряжение на трубке, колеблется гораздо меньше. На этом основано применение разряда как стабилизатора напряжения. С повышением частоты стабилизующее действие разряда падает.

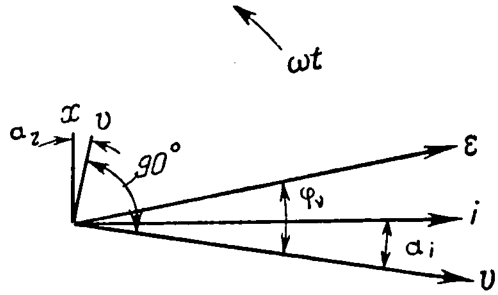
Наконец, колебания силы тока находим из

$$i = i_0 e^{j(\omega t + \varphi_\nu + \alpha_i)}, \tag{II, 16}$$

где
$$i_0=\frac{\omega_0^2\frac{E_c}{RI_c}\varepsilon_0\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{RI_c}{E_1}\right)^2+\frac{\omega^2}{4\Delta^2}}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}},$$
$$\operatorname{tg}\alpha_i=\frac{\omega}{2\Delta\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{RI_c}{E_1}\right)}.$$

Так как $0<\alpha_i<|\varphi_\nu|$, то колебания силы тока отстают от колебаний эдс (кажущаяся «индуктивность» плазмы), но опережают колебания концентрации ионов. Соотношение между всеми переменными величинами схематически изображено на векторной диаграмме (фиг. 1).

Все расчеты были сделаны в предположении, что коэффициенты α, g и h (а, следовательно, и входящие в них σ и $\varkappa$) не зависят от U_e.



Фиг. 1.

Вообще α, g и h могут быть функциями U_e, но это очень мало повлияет на наши результаты. Если, исходя из кривой Рамзауера для Hg, положим $\sigma=\frac{c_0}{\sqrt{U_e}}$, то $\alpha=\frac{\alpha_0}{\sqrt{U_e}}$, $g=g_0\sqrt{U_e}$, $h=\frac{h_0}{\sqrt{U_e}}$ (α_0, g_0, h_0 — постоянные); в этом случае формулы даже несколько упростятся. Вместо системы (II, 3—6) находим:

$$\nu'=\Delta\upsilon;\quad \upsilon'=h_0p(2\chi-\upsilon);\quad i=\nu+\chi;\quad \chi=\frac{E_c}{E_1}\varepsilon-\frac{RI_c}{E_1}\nu. \qquad (\mathrm{II}, 17)$$

Далее находим: $\omega_0^2=\frac{2h_0p\Delta\cdot RI_c}{E_1}$ (осталось неизменным), $\gamma=\frac{1}{2}h_0p$ (изменилось незначительно, поскольку обычно $\frac{RI_c}{E_1}$ немного менее 1). Величины ν_0, υ_0 и i_0 и разности фаз между ними выражаются через Δ, ω_0, γ и внешнюю цепь теми же формулами, поэтому очень мало изменяются по сравнению с предыдущим случаем. Для величины χ_0 получается отличие в численном множителе порядка $^1/_2$. Следовательно, наши общие результаты совсем не зависят, а частные формулы — очень мало зависят от того, как именно влияет U_e на σ и $\varkappa$.

Методом, аналогичным вышеизложенному, был рассмотрен также более общий случай цепи, содержащей, помимо R, также емкость C и самоиндукцию L. Вместо (II, 6) получается уравнение 4-го порядка; вопрос о самовозбуждении колебаний решается применением критерия Гурвица. Оказывается, что в этом случае при низком давлении возможно самовозбуждение, несмотря на горизонтальную статическую характеристику разряда. Для вынужденных колебаний получается решение, указывающее на возможность весьма острого резонанса, для чего, при данных R, C и условиях разряда, должны быть подобраны значения L и ω.

Поступило
5 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Kaufmann, Ann. d. Phys., 2, 158 (1900). [2] W. Daellenbach, Phys. ZS., 27, 101 (1926). [3] W. Daellenbach, Phys. ZS., 27, 448 (1926). [4] E. Friedlaender, Phys. ZS., 27, 361 (1926). [5] R. Seeliger, Einführung in die Physik der Gasentladungen (1927). [6] R. Baer, Handbuch der Physik, 14, 178. [7] F. M. Penning, Phys. ZS., 27, 187 (1926). [8] В. Грановский, ДАН, XXVI, 873 (1940).