Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКИХ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 IV 1940)

Результаты, полученные нами в двух предшествующих статьях *, позволяют дать решение смешанной задачи теории упругости. К последней задаче мы сейчас перейдем.

Пусть граница L состоит из $2n$ дуг l_k с концами a_k и a_{k+1} ($k=1, \ldots, 2n$; $a_{2n+1}=a_1$). Будем считать, что на l_{2k-1} известны действующие внешние силы, а на l_{2k} ($k=1, \ldots, n$) известны смещения. Обозначим суммы $\sum\limits_1^n l_{2k-1}$ и $\sum\limits_1^n l_{2k}$ соответственно через $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ и предположим пока, что ни одна из кривых L_j ($j=1, \ldots, m+1$) не содержится полностью в совокупности $L^{(1)}$.

Искомые аналитические в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют в этом случае предельным условиям:

$$\delta\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C \text{ на } L. \tag{1}$$

Здесь $\delta=1$ на $L^{(1)}$ и $=-\varkappa$ на $L^{(2)}$; $C=C_{2k-1}$ на l_{2k-1} и $=0$ на $L^{(2)}$, где C_{2k-1}—некоторые постоянные: наконец, функция $f(t)$ определяется непосредственно по заданным на l_k смещениям и внешним силам **.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ выразим через новую неизвестную $\omega(t)$ по формулам (3), приведенным в нашей первой статье. С помощью их предельные условия (1) запишутся следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1-\varkappa}{2}\omega(t_0)+\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt+K^*(t)=f(t_0)+C_{2k-1} \text{ на } L^{(1)},\\ &-\varkappa\omega(t_0)+K(t_0)=f(t_0) \text{ на } L^{(2)}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} K^*(t_0)&=K(t_0)+\sum_1^m(1+\varkappa)A_j\lg(t_0-z_j),\\ K(t_0)&=\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L\omega(t)\,d\lg\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\\ &+\sum_1^m\left[\frac{\bar A_j}{\bar t_0-\bar z_j}-\varkappa A_j\left\{\lg(t_0-z_j)+\overline{\lg(t_0-z_j)}\right\}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* См. ДАН, XXVII, № 9 и выше напечатанную статью.
** См. ссылку(1) в первой из указанных статей.

Положим, далее, на l_{2k-1}:

$$\chi(t_0) = -K^*(t_0) - \sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1} \frac{1+\varkappa}{2\pi i} \int\limits_{l_p} \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt + f(t_0) + C_{2k-1}, \tag{4}$$

где штрих на $\sum$ и индекс внизу указывают на пропуск при суммировании члена, соответствующего $p = 2k-1$. При этом будем иметь:

$$\frac{1-\varkappa}{2}\,\omega(t_0) + \frac{1+\varkappa}{2\pi i} \int\limits_{l_{2k-1}} \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt = \chi(t_0) \text{ на } l_{2k-1}\ (k=1, \ldots, n), \tag{5}$$

где расходящийся интеграл в левой части равенства следует понимать в смысле его главного значения.

Отсюда, используя прием T. Carleman'a [1], получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega(t_0) = \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\chi(t_0) + \frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta} \int\limits_{l_{2k-1}} \left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta} \frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt \\ \text{на } l_{2k-1}\ (k=1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\lg\varkappa$.

После преобразований последнее равенство примет следующий вид:

$$\omega(t_0) + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}K^*(t_0) + \left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}\Bigg\{\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\int\limits_{l_{2k-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{K^*(t)}{t-t_0}\,dt +$$

$$+\sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1}\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{l_p}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt\Bigg\} = \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}f(t_0) +$$

$$+\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}\Bigg\{\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\int\limits_{l_{2k-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{f(t)}{t-t_0}\,dt + C_{2k-1}\Bigg\}$$

$$\text{на } l_{2k-1} \qquad (k=1, \ldots, n). \tag{7}$$

Далее, имеем:

$$\sum_{1}^{2n}{}'_{2k-1}\int\limits_{l_p}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt = \sum_{1}^{n}{}'_{k}\int\limits_{l_{2p-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt +$$

$$+\int\limits_{L^{(2)}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt.$$

Подставим в последний интеграл вместо функции $\omega(t)$ ее выражение из второго из уравнений (2). Кроме того, постоянные C_{2k-1} определим через функционалы таким образом, чтобы всякая функция $\omega(t)$, удовлетворяющая уравнению (7), была непрерывна на $L^{(1)}$. Такие значения C_{2k-1} мы получим, приравняв в этом уравнении общий коэффициент при члене, содержащем $\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}$, нулю в точках $a_{2k-1}(k=1, \ldots, n)$. После некоторых вычислений будем иметь следующее уравнение на $L^{(1)}$:

$$\omega(t_0) + M\{\omega(t), t_0\} = F\{f(t), t_0\}, \tag{8}$$

где M и F — операторы, соответственно, равные:

$$M=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}K^*(t_0)+\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}\left[\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\int\limits_{L^{(2)}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}K(t)\times\right.$$

$$\times\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-a_{2k-1}}\right\}dt+\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\int\limits_{l_{2k-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}K^*(t)\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-a_{2k-1}}\right\}dt+$$

$$\left.+\sum_{1}^{n}{}'_{k}\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{l_{2p-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\omega(t)\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-a_{2k-1}}\right\}dt\right],$$

$$F(t_0)=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}f(t_0)+\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\int\limits_{L^{(2)}+l_{2k-1}}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}f(t)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-a_{2k-1}}\right\}dt\quad(k=1,\ldots,n).\tag{9}$$

Подставим во второе из уравнений (2) и в уравнение (8) вместо $K(t)$ и $K^*(t)$ обозначаемые ими выражения и поменяем порядок интегрирования в содержащих эти функции интегралах. Получим в результате систему интегральных уравнений Фредгольма для определения функции $\omega(t)$ на полной границе L.

Уравнение (8) можно заменить другим, имеющим более единообразную форму. Для этого, переписав первое из уравнений (2) в виде:

$$\frac{1-\varkappa}{2}\omega(t_0)+\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L^{(1)}}\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt=\chi^*(t_0)\quad\text{на } L^{(1)},\tag{10}$$

где

$$\chi^*(t_0)=-K^*(t_0)-\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int\limits_{L^{(2)}}\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt+f(t_0)+C_{2k-1},$$

и применяя прием Carleman'a к уравнению (10), получим:

$$\omega(t_0)=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\chi^*(t_0)+\frac{1+\varkappa}{2\pi\varkappa i}\prod_{1}^{n}\left(\frac{a_{2k}-t_0}{a_{2k-1}-t_0}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\int\limits_{L^{(1)}}\prod_{1}^{n}\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\theta}\frac{\chi^*(t)}{t-t_0}dt.\tag{11}$$

Последнее уравнение, которое аналогично предыдущему можно преобразовать к более простому виду, даст вместе со вторым из уравнений (2) другую систему уравнений Фредгольма для $\omega(t)$. При этом под C_{2k-1} $(k=1,\ldots,n)$ следует понимать функционалы, определенные через $\omega(t)$ указанным выше образом.

Отметим, что всякое решение второй системы интегральных уравнений удовлетворяет также первой системе и, значит, обладает свойствами последней. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

Рассмотрим теперь тот случай, когда сделанное вначале предположение не имеет места. Пусть, например, на кривых* L_j $(j=1,\ldots,r;$ $r\leqslant m)$ известны действующие внешние силы. Тогда следует положить:

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{1}^{r}(X_j+iY_j)\lg(z-z_j),$$

$$\psi(z)=\psi_1(z)+\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{1}^{r}(X_j-iY_j)\lg(z-z_j),$$

* Для определенности считаем, что внешняя граница L_{m+1} не принадлежит к их числу.

где новые аналитические функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут уже непрерывными на L_j $(j=1, \ldots, r)$. Их следует взять в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt + \sum_1^r \frac{b_j}{z-z_j} + \sum_{r+1}^m A_j \lg(z-z_j), \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varepsilon\,\omega(t)}}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\,\omega(t)}{(t-z)^2}\,dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,\overline{dt} + \sum_1^r \frac{b_j}{z-z_j} + \sum_{r+1}^m B_j \lg(z-z_j), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\varepsilon=1$ на L_j $(j=1, \ldots, r)$ и $=-\varkappa$ на L_j $(j=r+1, \ldots, m+1)$, а постоянные b_j и C_j $(j=1, \ldots, r)$ определены так же, как и в нашей предшествующей статье. В остальном поступаем, как выше.

Доказательство резрешимости получающихся в обоих случаях интегральных уравнений проводится с помощью приемов, использованных нами в предыдущих статьях. Этим исчерпывается решение смешанной задачи.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, **16** (1922).