Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

ДИФФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ШАРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 IV 1940)

Пусть в пространстве (x, y, z) дан вырез в виде шара радиуса 1, центр которого находится в начале координат.

В оставшейся части пространства при $t<0$ параллельно некоторому определенному направлению распространяется плоская волна со скоростью a, так что в момент времени $t=0$ фронт волны достигает сферы.

Диффракционное возмущение, вызванное шаром, для $t>0$ носит характер волн, расходящихся от шара во внешнее пространство и затухающих на бесконечности.

Введем сферические координаты (r, θ, φ) и сформулируем математическую постановку задачи диффракции.

Требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

имеющее при $t<0$ вид плоской волны и заданное соотношением

$$\begin{aligned} u_1 &= f(at+x\sin\lambda\cos v+y\sin\lambda\sin v+z\cos\lambda)= \\ &= f[at+r\sin\theta\sin\lambda\cos(\varphi-v)+r\cos\theta\cos\lambda], \end{aligned} \tag{2}$$

где $f(\xi)=0$ при $\xi<1$ так, чтобы сумма падающей плоской волны u_1 и добавочного возмущения u_2, получаемого в результате диффракции, во всякий момент времени $t\geqslant 0$ удовлетворяла бы граничным условиям вида

$$(u_1+u_2)\big|_{r=1}=0 \tag{3}$$

для закрепленной границы, или

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(u_1+u_2)\right]\Big|_{r=1}=0 \tag{4}$$

для свободной границы.

В наших предыдущих сообщениях ([1]) мы дали решение волнового уравнения (1), являющееся обобщением известного решения для случая радиальных колебаний и представляющее собой совокупность расходящихся и сходящихся волн. В нашем случае, ограничиваясь только теми решениями дифференциального уравнения (1), которые соответствуют волнам, двигающимся наружу, имеем:

$$u_2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int_0^{\infty}[A_{n,m}(at-r\cos h\xi)\cos m\varphi+$$

$$+B_{n,m}(at-r\cos h\xi)\sin m\varphi]P_n(\cos h\xi)\sin h\xi d\xi\times$$

$$\times P_n^{(m)}(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int_{-\infty}^{at-r}[A_{n,m}(z)\cos m\varphi+$$

$$+B_{n,m}(z)\sin m\varphi]\frac{1}{r}P_n\left(\frac{at-z}{r}\right)dz\times P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{5}$$

где $P_n(\xi)$ — полином Лежандра, а $P_n^{(m)}(\xi)$ — функция Лежандра высшего порядка.

Так как диффракционное возмущение возникает с момента времени $t=0$, то функции $A_n(z)$ и $B_n(z)$ примем равными нулю для $z<-1$.

Раскладывая заданное решение, представляющее собой плоскую волну, в ряд по сферическим функциям, имеем

$$f[at+r\sin\theta\sin\lambda\cos(\varphi-v)+r\cos\theta\cos\lambda]=$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[a_{n,m}(r,t)\cos m\varphi+b_{n,m}(r,t)\sin m\varphi]P_n^{(m)}(\cos\theta). \tag{6}$$

В силу предельного условия (3) для закрепленной границы мы должны иметь:

$$a_{n,m}(1,t)+\int_{-1}^{at-1}A_{n,m}(z)P_n(at-z)\,dz=0, \tag{7}$$

$$b_{n,m}(1,t)+\int_{-1}^{at-1}B_{n,m}(z)P_n(at-z)\,dz=0. \tag{8}$$

Таким образом, получаем два независимых одно от другого аналогичных интегральных уравнения для определения искомых функций $A_{n,m}(z)$ и $B_{n,m}(z)$. Заменяя верхний предел интегралов одной буквой x, т. е. полагая $at-1=x$, имеем:

$$a_n\left(1,\frac{x+1}{a}\right)=-\int_{-1}^{x}A_{n,m}(z)P_n(x-z+1)\,dz, \tag{9}$$

$$b_n\left(1,\frac{x+1}{a}\right)=-\int_{-1}^{x}B_{n,m}(z)P_n(x-z+1)\,dz, \tag{10}$$

причем левые части уравнений (9) и (10) при $x=-1$ обращаются в нуль. Интегральные уравнения (9) и (10) носят название интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с регулярным ядром, зависящим от разности аргументов. Дифференцируя обе части уравнений (9) и (10), мы приведем их к эквивалентным интеграционным уравнениям Вольтерра 2-го рода:

$$A_{n,m}(x)+\int_{-1}^{x}A_{n,m}(z)P'_n(x-z+1)\,dz=-\frac{da_{n,m}\left(1,\frac{x+1}{a}\right)}{dx}, \tag{11}$$

$$B_{n,m}(x)+\int_{-1}^{x}B_{n,m}(z)P'_n(x-z+1)\,dz=-\frac{db_{n,m}\left(1,\frac{x+1}{a}\right)}{dx}. \tag{12}$$

Как известно, из теории решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеем

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m}(x) &= -\frac{da_{n,m}\left(1, \frac{x+1}{a}\right)}{dx} + \int_{-1}^{x} H_{n,m}(x- \\ &\quad - s)\frac{d}{ds}a_{n,m}\left(1, \frac{s+1}{a}\right)ds, \\ B_{n,m}(x) &= -\frac{db_{n,m}\left(1, \frac{x+1}{a}\right)}{dx} + \int_{-1}^{x} H_{n,m}(x- \\ &\quad - s)\frac{d}{ds}b_{n,m}\left(1, \frac{s+1}{a}\right)ds. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Резольвента $H_{n,m}(\nu)$ равна сумме вычетов функции

$$\Phi_n(s) = \frac{-s^n l^{s\nu}}{s^n + s^{n-1}P_n'(1) + s^{n-2}P_n''(1) + \ldots + P_n^n(1)} \tag{14}$$

по отношению к нулям знаменателя, причем символ $P_n^n(x)$ означает n-ую производную.

Таким образом, решение задачи о диффракции плоской волны относительно шара с закрепленной границей имеет вид:

$$u = f[at + r\sin\theta\sin\lambda\cos(\varphi - v) +$$

$$+ r\cos\theta\cos\lambda] + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int_{0}^{\infty}[A_{n,m}(at - r\cos h\xi)\cos m\varphi +$$

$$+ B_{n,m}(at - r\cos h\xi)\sin m\varphi]P_n(\cos h\xi)\sin h\xi d\xi P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{15}$$

где функции $A_{n,m}(\mu)$ и $B_{n,m}(\mu)$ для $\mu < -1$ равны нулю, а для $\mu > -1$ определяются формулами (13) и (14); функция $H(\mu) = 0$ при $\mu < 1$. Для случая свободной границы, в силу предельного условия (4) и начальных условий, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial a_{n,m}(r,t)}{\partial r}\right]_{r=1} - \int_{0}^{\operatorname{arc\,cos} h(at+1)} A'_{n,m}(at - \cos h\xi)\cos h\xi \times \\ &\qquad \times P_n(\cos h\xi)\sin h\xi d\xi = 0, \\ &\left[\frac{\partial b_{n,m}(r,t)}{\partial r}\right]_{r=1} - \int_{0}^{\operatorname{arc\,cos} h(at+1)} B'_{n,m}(at - \\ &\qquad - \cos h\xi)\cos h\xi P_n(\cos h\xi)\sin h\xi d\xi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

в предположении, что

$$\lim_{z\to -1} A_{n,m}(z) = 0; \quad \lim_{z\to -1} B_{n,m}(z) = 0, \tag{17}$$

причем первые слагаемые левых частей равенств (16) при $t = 0$ обращаются в нуль. Введя в интегралах уравнений (16) новую переменную интегрирования, определяемую уравнением $z = at - \cos h\xi$, мы их тогда приведем к уравнениям, аналогичным (7) и (8). Таким образом, решение уравнений (16) имеет вид:

$$
\left.\begin{aligned}
A'_{n,m}(x) &= \left[\frac{\partial^2 a_{n,m}\left(r, \frac{x+1}{a}\right)}{\partial r \partial x}\right]_{r=1} - \\
&- \int_{-1}^{x} L_{n,m}(x-s)\left[\frac{\partial^2 a_{n,m}\left(r, \frac{s+1}{a}\right)}{\partial r \partial s}\right]_{r=1} ds, \\
B_{n,m}(x) &= \left[\frac{\partial^2 b_{n,m}\left(r, \frac{x+1}{a}\right)}{\partial r \partial x}\right]_{r=1} - \\
&- \int_{-1}^{x} L_{n,m}(x-s)\left[\frac{\partial^2 b_{n,m}\left(r, \frac{s+1}{a}\right)}{\partial r \partial s}\right]_{r=1} ds,
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

где резольвента $L_{n,m}(\nu)$ равна сумме вычетов функции

$$
F_n(s) = \frac{-s^{n+1} l^{s\nu}}{s^{n+1} + [P'_n(1) + \ln(1)]\, s^n + [P''_n(1) + 2P'_n(1)]\, s^{n-1} + \ldots +}
$$

$$
\frac{-s^{n+1} l^{s\nu}}{+ [P^n_n(1) + n \ln^{n-1}(1)]\, s + (n+1) \ln^n(1)} \quad (19)
$$

по отношению к нулям знаменателя, причем символ $P^n_n(x)$ означает n-ую производную.

Равенства (18) в силу условий (17) заменяются эквивалентными

$$
\left.\begin{aligned}
A_{n,m}(x) &= \int_{-1}^{x} \left\{\left[\frac{\partial^2 a_{n,m}\left(r, \frac{\mu+1}{a}\right)}{\partial r \partial \mu}\right]_{r=1} - \right. \\
&\left. - \int_{-1}^{\mu} L_{n,m}(\mu-s)\left[\frac{\partial^2 a_{n,m}\left(r, \frac{s+1}{a}\right)}{\partial r \partial s}\right]_{r=1} ds\right\} d\mu, \\
B_{n,m}(x) &= \int_{-1}^{x} \left\{\left[\frac{\partial^2 b_{n,m}\left(r, \frac{\mu+1}{a}\right)}{\partial r \partial \mu}\right]_{r=1} - \right. \\
&\left. - \int_{-1}^{\mu} L_{n,m}(\mu-s)\left[\frac{\partial^2 b_{n,m}\left(r, \frac{s+1}{a}\right)}{\partial r \partial s}\right]_{r=1} ds\right\} d\mu.
\end{aligned}\right\} \quad (20)
$$

Таким образом, решение задачи о диффракции плоской волны относительно шара со свободной границей определяется формулой (15), где функции $A_{n,m}(\mu)$ и $B_{n,m}(\mu)$ для $\mu < -1$ равны нулю, а для $\mu > -1$ определяются формулами (20).

Помимо одного волнового уравнения мы рассмотрим аналогичную задачу для теории упругости.

Пусть в бесконечном упругом пространстве с постоянными Ляме λ и μ и плотностью ρ дан вырез в виде шара радиуса 1, центр которого находится в начале координат.

В оставшейся части пространства при $t < 0$ распространяется в направлении отрицательной оси z плоская волна продольного типа со скоростью $a = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, так что в момент времени $t = 0$ фронт волны достигает сферы.

Диффракционное возмущение, вызванное шаром для $t > 0$, носит характер волн как продольного, так и поперечного типа, расходящихся от шара во внешнее пространство и затухающих на бесконечности.

Пусть $(u_r, u_\vartheta, u_\theta)$ — составляющие вектора смещения на сферические оси (r, ϑ, θ). При нашем предположении имеем $u_\vartheta = 0$ и $\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \vartheta} = 0$. Тогда легко показать, что

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\psi; \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\psi, \tag{21}$$

где функции φ и ψ не зависят от ϑ и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \tag{22}$$

$$\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta\psi - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\psi, \tag{23}$$

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Математическая постановка рассматриваемой нами задачи диффракции для случая закрепленной границы формулируется следующим образом.

Требуется найти решение системы уравнений (22) и (23), имеющее при $t < 0$ вид плоской волны и заданное соотношением

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= f(at + z) = f(at + r\cos\theta), \\ \psi_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где $f(\xi) = 0$ при $\xi < R$ так, чтобы сумма падающей плоской волны и добавочных возмущений φ_2 и ψ_2, получаемых в результате диффракции во всякий момент времени $t \geqslant 0$, удовлетворяла граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^2}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\psi_2\right]_{r=R} = 0, \\ &\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{1}{r}\psi_2\right]_{r=R} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Можно доказать, аналогично тому, как это нами сделано в цитированной выше работе для уравнения (1), что всякое решение $\psi(r, \theta, t)$ уравнения (23), определяемое равенством

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r, t) P_n'(\cos\theta)\sin\theta, \tag{26}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+1+\varepsilon} a_n(r, t) = 0,$$

может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} &[C_n(bt - r\cos h\xi) + D_n(bt + r\cos h\xi)] \times \\ &\times P_n(\cos h\xi)\sin h\xi\, d\xi \sin\theta\, P_n'(\cos\theta). \end{aligned} \tag{27}$$

Решение (27) уравнения (23) представляет собой совокупность расходящихся и сходящихся волн.

Дополнительные потенциалы, которые соответствуют волнам, двигающимся наружу, ищем в виде:

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} A_n\,(at - r\cos h\xi)\,P_n\,(\cos h\xi)\,\sin h\xi\, d\xi P_n\,(\cos\theta). \tag{28}$$

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} B_n\,(bt - r\cos h\xi)\,P_n\,(\cos h\xi)\,\sin h\xi\, d\xi\,\sin\theta P_n'\,(\cos\theta). \tag{29}$$

Так как диффракционное возмущение возникает с момента времени $t=0$, то функции $A_n(\mu)$ и $B_n(\mu)$ примем равными нулю для $\mu < -R$.

Раскладывая заданное решение, представляющее собой плоскую волну, в ряд по полиномам Лежандра, имеем

$$\varphi_1 = f\,(at + r\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(r,\,t)\,P_n\,(\cos\theta). \tag{30}$$

В силу граничных условий (25), после внесения в них рядов для φ_1, φ_2 и ψ_2 получаем систему интегральных уравнений 1-го рода типа Вольтерра для определения функций A_n и B_n

$$-R\left[\frac{\partial a_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=R} = \int_{-R}^{at-R} -A_n'(z)\,P_n\left(\frac{at-z}{R}\right)\frac{at-z}{R}\,dz + {}$$
$$+\,n\,(n+1)\int_{-R}^{bt-R} B_n'(z)\,Q_{n+1}\left(\frac{bt-z}{R}\right)dz, \tag{31}$$

$$a_n\,(R,\,t) = \int_{-R}^{at-R} -A_n'(z)\,Q_{n+1}\left(\frac{at-z}{R}\right)dz + {}$$
$$+\int_{-R}^{bt-R} B_n'(z)\left[P_n\left(\frac{bt-z}{R}\right)\frac{bt-z}{R} - Q_{n+1}\left(\frac{bt-z}{R}\right)\right]dz \tag{32}$$

в предположении, что

$$\lim_{z\to -R} A_n\,(z) = 0; \qquad \lim_{z\to -R} B_n\,(z) = 0,$$

где

$$Q_{n+1}\,(x) = \int_1^x P_n\,(z)\,dz.$$

Интегральные уравнения (31), (32) дают возможность определить функции A_n и B_n в конечном виде в интервале $(-R,\,\infty)$ подобно тому, как это нами сделано для уравнений (9) и (10). Аналогично решается задача диффракции плоской упругой волны относительно шара, на поверхности которого отсутствуют напряжения.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
15 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Миндлин, ДАН, XXVI, № 6 (1940). [2] V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales, Paris (1913).