

Л. М. ВИБЕРМАН

О ДИФФУЗИИ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 14 IV 1940)

§ 1. Кенти (¹) получил выражения для коэффициента диффузии резонансного излучения, пользуясь методом, данным Майером (²) для нахождения коэффициента диффузии молекул. Учет доплеровской формы линии привел к расходящемуся выражению для коэффициента диффузии D . Для устранения расходимости Кенти использовал искусственный прием при подсчете D . Этот прием состоял в том, что при интеграции по объему газ считался бесконечным во всех направлениях, однако, при интеграции по частотам учитывались только кванты, средний свободный пробег которых не превышал действительной толщины слоя газа в направлении диффузии (Кенти рассматривал случай плоской диффузионной задачи). Таким образом, форма линий излучения и поглощения каждого атома как бы зависела от оптической плотности слоя газа, и с изменением последней изменялась точность самого метода.

Можно показать, что нет необходимости прибегать к столь искусственному приему и что строгий вывод приводит к сходимости выражения для D , если оптическая плотность слоя газа в направлении диффузии конечна. Мы так же, как и Кенти, будем рассматривать плоскую задачу и будем пользоваться методом Майера. Однако в отличие от Кенти мы будем интегрировать по бесконечному интервалу частот и по действительному объему излучающего слоя.

§ 2. Если положить, что форма линии эмиссии каждого элементарного объема определяется только доплер-эффектом, то доля квантов (испущенных этим объемом), пролетевших перед поглощением расстояние, равное или большее R , дается (³) функцией

$$f(R) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} e^{-Re^{-\omega^2}} d\omega, \quad (1)$$

где R измеряется в свободных пробегах середины линии $-\frac{1}{k_0}$, а ω — величина, пропорциональная разности частот середины линии и бесконечно узкой полоски, выделенной в той же линии. В отличие от молекулярной диффузии закон поглощения неэкспоненциальный, причем $f(R)$ убывает значительно медленнее экспоненты. Выберем в слое газа конечной толщины площадку Δs параллельно внешним ограничивающим

плоскостям. Число квантов, проходящих с одной стороны через Δs за единицу времени, выразится так:

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{2\pi^{1/2} \tau} \int_x^l \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_x e^{-\omega^2} e^{-(x'-x)uk_0} e^{-\omega^2}}{u^2} d\omega du dx', \quad (2)$$

где τ — продолжительность жизни возбужденного состояния изолированного атома, l — толщина слоя газа, x — координата площадки, x' — текущая координата при интегрировании по объему, n_x — концентрация излучающих атомов в точке, определяемой координатой x' , и $u = \frac{1}{\cos \varphi}$, где φ — азимут. Аналогично можно найти число частиц, проходящих в противоположном направлении. Если мы разложим n_x в ряд по степеням $x' - x$ и обозначим $(x' - x)k_0 = R$ и $(l - x)k_0 = R_0$, то при i -той производной в выражении для N_{\downarrow} будет стоять коэффициент

$$B_i = \frac{1}{2\pi^{1/2} \tau k_0} \int_0^{R_0} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R^i e^{-\omega^2} e^{-R_0 u} e^{-\omega^2}}{i! k_0^i u^2} d\omega du dR. \quad (3)$$

Коэффициент при первой производной B_1 может быть после преобразования представлен так:

$$B_1 = \frac{1}{6\tau k_0^2} \int_0^{R_0} R f(R) dR + \frac{1}{6\tau k_0^2} R_0^2 f(R_0) + \frac{R_0^3}{6\tau k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\omega^2} E_i(-R_0 e^{-\omega^2}) d\omega, \quad (4)$$

где $f(R)$ дано (1), а $E_i(-R_0 e^{-\omega^2})$ — интегральная экспонента (4). Так как $f(R)$ ограничена при любом положительном R , то сходимость двух первых членов уравнения (4) очевидна, ибо R_0 у нас конечно. Сходимость 3-го члена легко показывается разложением $E_i(-R_0 e^{-\omega^2})$ в ряд и его почленным интегрированием, в результате чего получается новый сходящийся ряд.

Таким образом, при R_0 конечном сходимость выражения для B_1 получается при вполне строгом выводе и нет необходимости в искусственном приеме, использованном Кенти. При безграничном увеличении R_0 B_1 действительно расходится, но при этом в газе наступает термодинамическое равновесие, градиент концентрации излучающих атомов становится равным нулю и процесс диффузии прекращается.

§ 3. Гроот и Драйвестейн (5) написали интегральное уравнение для концентрации излучающих атомов в разряде с учетом оптического возбуждения и ударов 1-го и 2-го рода. Гроот (6) перешел от интегрального уравнения к дифференциальному и дал его решение, но в последующей работе (7) был вынужден от него отказаться, так как обнаружил расходимость интеграла, являющегося коэффициентом при производной от концентрации излучающих атомов. Можно показать, что расходимость получилась потому, что первоначально конечная толщина слоя газа в процессе интегрирования принята бесконечной. В этом случае также наступает термодинамическое равновесие, исчезают все производные от концентрации излучающих атомов, и дифференциальное уравнение Гроота распадается на уравнения, соответствующие принципу микроравновесия.

§ 4. Из уравнения (3) видно, что коэффициенты B_i зависят от K_0 , т. е. являются функциями координат. Кроме того, неэкспоненциальный закон поглощения означает, что концентрация излучающих атомов будет изменяться нелинейно даже в случае плоской диффузионной задачи при отсутствии источников в излучающем слое. Причем, так как $f(R)$ спадает медленнее экспоненты, то высшие производные концентрации могут играть существенную роль. Таким образом, в обычном смысле слова о диффузии излучения нельзя говорить. При подсчете N_{\downarrow} надо интегрировать по действительному объему излучающего слоя, а число учитываемых производных брать в зависимости от оптической плотности и условий возбуждения.

§ 5. Рассмотрим граничные условия при неэкспоненциальном законе поглощения. Граничные условия для экспоненциального закона были даны В. А. Фабрикантом⁽⁸⁾, однако, применение их в рассматриваемом случае затруднительно, так как в основу вывода было положено понятие среднего свободного пробега. Будем считать, что излучающие атомы появляются на границе за счет оптического возбуждения проходящим излучением. Тогда концентрация излучающих атомов на границе

$$n_0 = \frac{\Delta N}{\Delta V} \tau_g, \quad (5)$$

где ΔV — элементарный объем, выделенный у границы, ΔN — количество квантов, поглощаемых за единицу времени объемом ΔV , τ_g — продолжительность жизни возбужденного состояния атома у границы. Если пренебречь гасящим действием стенки, то можно считать, что $\tau_g = \tau$ — продолжительности жизни возбужденного состояния изолированного атома.

Выделим на расстоянии Δx от границы площадку $\Delta \sigma$ параллельно внешней ограничивающей плоскости. Можно показать, что если через $\Delta \sigma$ проходит N_{\downarrow} частиц, даваемое формулой (2), то количество квантов, поглощаемых в объеме $\Delta \sigma \Delta x$,

$$\Delta N = \Delta \sigma \Delta x \frac{k_0}{2\pi^{1/2} \tau} \int_0^{R_0} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_x e^{-2\omega^2} e^{-Rue^{-\omega^2}}}{u} d\omega du dR. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим, что концентрация излучающих атомов на границе

$$n_0 = \frac{k_0}{2\pi^{1/2}} \int_0^{R_0} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_x e^{-2\omega^2} e^{-Rue^{-\omega^2}}}{u} d\omega du dR. \quad (7)$$

Если мы разложим n_x в ряд по степеням x , то уравнение (7) даст нам связь концентрации и производных концентрации на границе. Если подобным же образом написать граничное условие при экспоненциальном законе поглощения, то мы получим граничное условие, данное В. А. Фабрикантом.

§ 6. Земанский⁽⁹⁾ предложил находить эффективную продолжительность жизни возбужденного состояния τ_{ef} , используя решения дифференциального уравнения Милна⁽¹⁰⁾ путем замены в нем оптической плотности для бесконечно узкой спектральной линии $k_0 l$ некоторой эквивалентной плотностью $\bar{k}l$. Причем для больших $k_0 l$ находилась при помощи приближенного способа Кенти, а для малых $k_0 l$, вследствие неприменимости способа Кенти, использовалось вычисление $\bar{k}l$, данное Семсоном.

Земанский получил совпадение вычисленных и экспериментальных значений с точностью до порядка величин. Однако сам метод внушает некоторые сомнения, что было отмечено В. А. Фабрикантом (11). Действительно, в отличие от задачи Милна, при прохождении резонансного излучения с уширенной линией коэффициенты при производных концентрации уже зависят от координат, и высшие производные играют весьма существенную роль (см. §§ 2, 4).

Мы попытаемся определить τ_{ef} иным методом. Если M — число излучающих атомов, N — число излучаемых за единицу времени квантов, то эффективная продолжительность жизни

$$\tau_{ef} = \frac{M}{N}. \quad (8)$$

Подсчитываем M и N применительно к опытам Земанского (12) и Вебб и Мессенджер (13), при которых измерялся показатель экспоненты спада интенсивности выходящего излучения после выключения возбуждающего. Мы попрежнему будем считать, что концентрация излучающих атомов n_x зависит только от одной координаты x , и предположим, что закон измерения n_x дается выражением:

$$n_x = A + Bx + Cx^2, \quad (9)$$

где A , B и C — неизвестные параметры, зависящие от оптической плотности. Уравнение (9) эквивалентно предположению, что третья производная концентрации не оказывает существенного влияния. Мы рассчитаем τ_{ef} для двух крайних случаев: когда наибольшая концентрация получается на стенке, через которую газ возбуждается, т. е. при $x=l$, и когда наибольшая концентрация — в центре сосуда, т. е. при $x = \frac{l}{2}$.

Положение максимума даст нам первое условие, связывающее параметры A , B и C . Второе условие мы получим, составив граничное условие по методу, данному в § 5. Причем мы будем интегрировать по полусфере, описанной радиусом, равным l — толщине слоя газа. Такие пределы интегрирования, конечно, снижают точность наших результатов, но интеграция по действительному объему сосуда привела бы к значительным математическим трудностям. В тех случаях, где действительно нужна будет высокая точность, можно будет сделать соответствующие вычисления.

Теперь мы получим закон изменения концентрации как функцию только одного параметра (например C). Подставляя полученное выражение для n_x в уравнение (2), но интегрируя только по полусфере, мы получим, что

$$N_{\downarrow} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{n_0}{4k_0} \int_0^{R_0} f(R) dR - \frac{CR_0}{3k_0^2} \int_0^{R_0} Rf(R) dR + \right. \\ \left. + \frac{C}{8k_0^2} \int_0^{R_0} R^2 f(R) dR \right], \quad (10)$$

где $n_0 = A$ — концентрация на границе, а $C = \frac{n_0 a}{\frac{R_0}{k_0^2} b + \frac{c}{3k_0^2}}$, где $a = 1 +$

$$+ f(R_0); b = \int_0^{R_0} f(R) dR - R_0 f(R_0); c = 2 \int_0^{R_0} Rf(R) dR - R_0^2 f(R_0).$$

Число атомов, излучающих в направлении нашей площадки, нетрудно найти, зная закон распределения n_x . Мы получим, что

$$M = \frac{n_0 R_0}{4k_0} - \frac{R_0^3 c}{8k_0^3}. \quad (11)$$

Подставляя (9), (10) и (11) в (8), мы получим, что

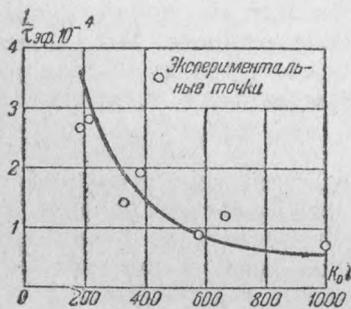
$$\tau_{ef} = \frac{6R_0^3 \frac{b}{a} - 2R_0 \frac{c}{a} + 3R_0^3}{6\psi_0 R_0 \frac{b}{a} - 2\psi_0 \frac{c}{a} + 8R_0 \psi_1 - 3\psi_2} \tau, \quad (12)$$

где

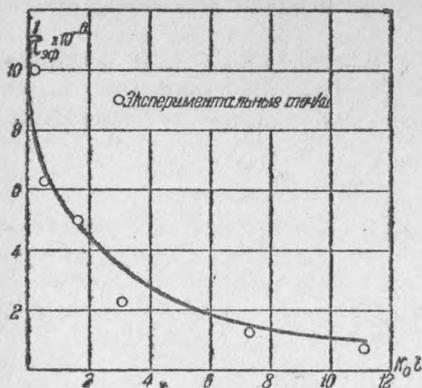
$$\psi_0 = \int_0^{R_0} f(R) dR; \quad \psi_1 = \int_0^{R_0} R f(R) dR; \quad \psi_2 = \int_0^{R_0} R^2 f(R) dR.$$

Формулы (10)–(12) выведены для случая, когда наибольшая концентрация возбуждающих атомов находится на стенке. Для максимума концентрации в центре сосуда мы имеем

$$\tau_{ef} = \frac{6R_0^3 \frac{b}{a} - 4R_0 \frac{c}{a} + 2R_0^3}{6\psi_0 R_0 \frac{b}{a} - 4\psi_0 \frac{c}{a} + 8R_0 \psi_1 - 6\psi_2} \tau. \quad (13)$$

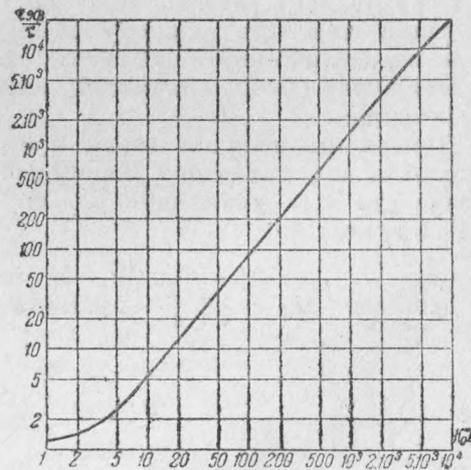


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Численные результаты, даваемые формулами (12) и (13), не расходятся по порядку величин. При оптических плотностях порядка нескольких сот (условия опытов Земанского), формулы (12) и (13) с достаточной степенью точности могут быть написаны так:



Фиг. 3.

$$\tau_{ef} = \frac{3R_0^3}{6\psi_0 b R_0 + 8R_0 \psi_1 - 3\psi_2} \tau, \quad (12a)$$

$$\tau_{ef} = \frac{2R_0^3}{6\psi_0 R_0 b + 8R_0 \psi_1 - 6\psi_2} \tau. \quad (13a)$$

Как видно из приведенного вывода, τ_{ef} зависит от оптической плотности $R_0 = k_0 l$ и от формы кривой распределения концентрации. Последнее учитывается соотношениями между параметрами A , B и C и в конечном итоге также определяется оптической плотностью.

На фиг. 1 и 2 показана теоретическая зависимость $\frac{1}{\tau_{ef}}$ от $k_0 l$. Там же изображены экспериментальные данные Земанского и Вебб и Мессенджер. Совпадение вычисленных величин с экспериментальными достаточно хорошее. Полное совпадение некоторых теоретических и экспериментальных значений на фиг. 2 надо расценивать как случайное, если учесть ряд допущений, сделанных при выводе (например, пределы интеграции), и известную неопределенность условий опытов.

На фиг. 3 показана зависимость $\frac{\tau_{ef}}{\tau}$ от $k_0 l$, рассчитанная для случая, когда максимальная концентрация находится в центре сосуда.

Важно отметить, что τ_{ef} вычислялась одним и тем же методом для малых и больших $k_0 l$, тогда как метод Кенти непригоден для малых $k_0 l$ (например, расчет Кенти с уменьшением $k_0 l$ дает резкое возрастание $\bar{k}l$ вместо убывания).

Автор выражает благодарность В. А. Фабриканту, по предложению и под непосредственным руководством которого выполнялась эта работа.

Всесоюзный электротехнический институт
и Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
15 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Кенту, Phys. Rev., 42, 823 (1932). ² L. Loeb, The Kinetic Theory of Gases (1934). ³ E. W. Samson, Phys. Rev., 40, 941 (1932). ⁴ Jahnke u. Emde, Funktionentafeln (1928). ⁵ M. Druyvesteyn u. W. de Groot, Physica, 12, 153 (1932). ⁶ W. de Groot, Physica, 12, 289 (1932). ⁷ W. de Groot, Physica, 1, 28 (1933). ⁸ В. А. Фабрикант, ДАН, XXIII, 3 (1939). ⁹ М. Земанский, Phys. Rev., 42, 843 (1932). ¹⁰ E. Milne, J. Lond. Math. Soc., 1, 40 (1926). ¹¹ В. А. Фабрикант, ЖЭТФ, 8, 549 (1938). ¹² М. Земанский, Phys. Rev., 29, 513 (1927). ¹³ Н. Вебб a. Н. Messenger, Phys. Rev., 33, 319 (1929).